

Sonderdruck aus
Nr. 6 (1990), Seite 55/59

VDI-Z ENTWICKLUNG
KONSTRUKTION
PRODUKTION
ZEITSCHRIFT DES VEREINS DEUTSCHER INGENIEURE
FÜR MASCHINENBAU UND METALLVERARBEITUNG

Verzahnungen für Unrundräder hoher Qualität

Von Tilman Hasse, Ettlingen

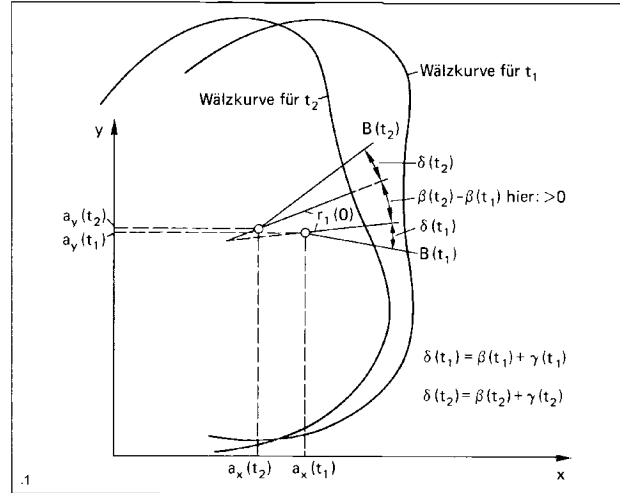
Verzahnungen für Unrundräder hoher Qualität

Ihre Auslegung und ihre Herstellung durch Wälzstoßen

Mit der Einführung numerisch gesteuerter Wälzstoßmaschinen ist eine vergleichsweise sehr viel komplexere Bearbeitung von Werkstücken möglich geworden, die es gestattet, gepaarte Stirnräder mit fast beliebigen Wälzkurven herzustellen. Die erreichbare Form der Wälzkurve wird eigentlich nur durch verschiedene Kollisionsbetrachtungen – insbesondere die Herstellung betreffend – eingengt. Damit ist eine Vielzahl von aus der Praxis geforderten Unrundrädern genau und wirtschaftlich herstellbar geworden. Als interessantes Beispiel kann ein Hydromotor angeführt werden. Der Beitrag befaßt sich zunächst mit der Auslegung unrunder Geradstirnräder und geht dann ausführlich auf die Herstellung mit CNC-Wälzstoßmaschinen ein. Er schließt mit einer Reihe von Beispielen.

Von Tilman Hasse, Ettlingen

Bild 1. Beispiel einer durch eine Funktion $r_1(\delta)$ definierten Wälzkurve und deren Lage für zwei unterschiedliche Parameterwerte t_1 und t_2 .



1 Auslegung von Unrundrädern

Die Auslegung von gepaarten Unrundrädern geschieht grundsätzlich in zwei Schritten: Auslegung der Wälzkurven und Auslegung der Verzahnungsgeometrie.

1.1 Berechnung der Wälzkurven zweier gepaarter Unrundräder

Unter einem Unrundrad soll hier ein durch eine Wälzkurve begrenztes ebenes Gebilde verstanden werden, das sich um eine nicht notwendig feststehende Achse dreht und in der Form der nachstehenden Gleichung beschrieben werden kann, **Bild 1**:

$$B(t) = \begin{bmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{bmatrix} + r_1(\delta_1(t)) \cdot \begin{bmatrix} \sin(\gamma(t) + \gamma_0) \\ \cos(\gamma(t) + \gamma_0) \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } \delta_1(t) = \beta(t) + \gamma(t) \quad (1)$$

Erläuterungen zu Gl. (1):

t sei ein Parameter, zum Beispiel Zeit oder auch ein von der Zeit abhängiger anderer Parameter;

γ_0 sei ein beliebiger konstanter Winkel;

$r_1(\delta_1) > 0$ sei eine im zulässigen Winkelbereich definierte Funktion und sei stückweise stetig differenzierbar;

$B(t)$ sei ein Punkt auf der Wälzkurve;

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{bmatrix}$$

sei der Punkt in der Ebene, durch den die Achse verläuft.

Der Winkel $\delta_1(t) = \beta(t) + \gamma(t)$ muß natürlich im zulässigen Winkelbereich liegen. Durch den Winkel $\beta(t)$ und den Punkt $A(t)$ wird also die Wälzkurve in der Ebene festgelegt und durch den Winkel $\gamma(t)$ ein Punkt $B(t)$ auf der Wälzkurve. In diesem Fall soll der Punkt B immer ein Berührungspunkt mit einer zweiten Wälzkurve sein. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man den Drehpunkt der zweiten Wälzkurve fest in den Nullpunkt legen. Entsprechend Gl. (1) kann sie dann in der folgenden Form dargestellt werden:

$$B_2(t) = r_2(\delta_2(t)) \cdot \begin{bmatrix} \sin(\psi(t) + \psi_0) \\ \cos(\psi(t) + \psi_0) \end{bmatrix} \quad (2)$$

mit $\delta_2(t) = \varphi(t) + \psi(t)$.

Wälzen sich zwei Unrundräder auf ihren Wälzkurven gegeneinander ab, so ist dies gleichbedeutend mit den folgenden Bedingungen:

– Die Unrundräder müssen sich zu jedem Zeitpunkt in genau einem Punkt ihrer Wälzkurven berühren.

– In dem Berührungspunkt muß die Wälzbedingung erfüllt sein.

Aus diesen beiden Bedingungen ergeben sich Differentialgleichungen, mit denen sich die Wälzkurven von Unrundrädern bei Vorgabe gewisser Anfangsdaten berechnen lassen. Sie führen für die Berechnung von Unrundrädern zu den folgenden Möglichkeiten:

I. Konstanter Achsabstand wird für das Unrundpaar vorausgesetzt, also $a_x(t) \equiv a_x$ und $a_y(t) \equiv a_y$ in Gl. (1) sind konstant (siehe Abschnitt 3):

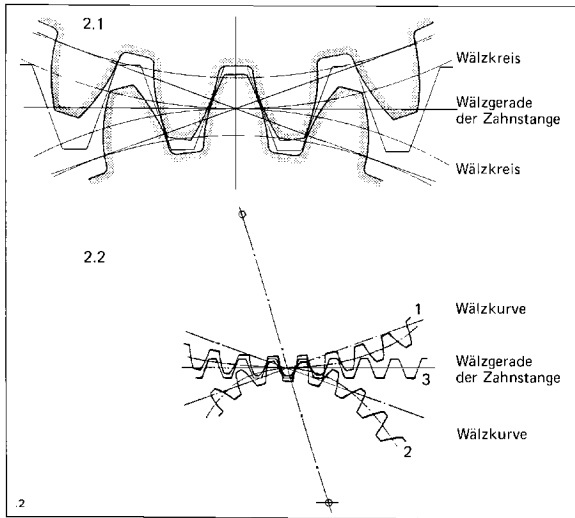


Bild 2. Eingriffsverhältnisse.

Bild 2.1. Eingriff eines runden Radpaares. Bild 2.2. Eingriff bei Unrundrädern.

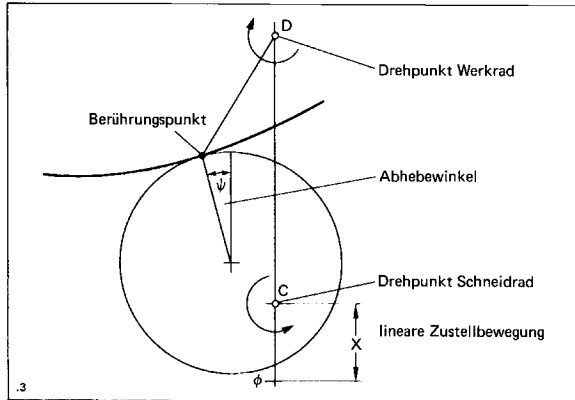


Bild 3. Momentaufnahme der Konfiguration beim Verzahnen.

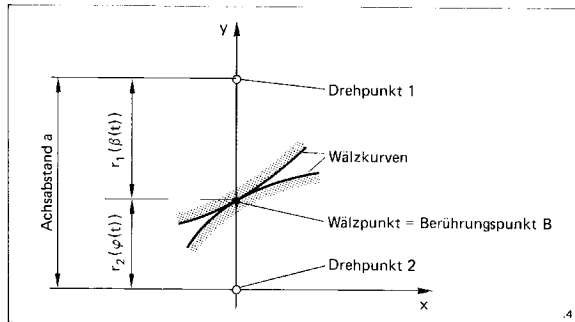


Bild 4. Wälzkurvenpaar bei konstantem Achsabstand.

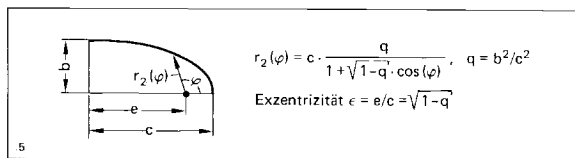


Bild 5. Zum Beispiel Ellipse.

| Vorgabe | Berechnung |
|--|--------------------------|
| a) Unrundrad und Achsabstand | Gegenrad |
| b) Unrundrad und Periodizität | Achsabstand und Gegenrad |
| c) Übersetzungsverhältnis in Abhängigkeit vom Drehwinkel; dazu muß der Achsabstand vorgegeben werden | Unrundrad mit Gegenrad |

II. Variabler Achsabstand wird für das Unrundpaar zugelassen (hier kann eines der Unrundräder natürlich auch rund sein!):

| Vorgabe | Berechnung |
|--|---------------------------|
| a) Unrundräderpaar und $a_x(t)$ (bzw. $a_y(t)$) | $a_y(t)$ (bzw. $a_x(t)$) |
| b) Unrundrad, $\begin{bmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{bmatrix}$ | Gegenrad |

Für den Fall II. sei angemerkt, daß es noch zahlreiche weitere Berechnungsvarianten gibt, z. B. falls die Vektorfunktion $A(t)$ aus einer Überlagerung (= Linearkombination) zweier Vektorfunktionen entsteht.

1.2 Auslegung der Verzahnungsgeometrie

Als bewährte und unempfindliche Verzahnung wird auch für Unrundräder die Evolventenverzahnung verwendet. Bei runden Zahnradern liegt eine Evolventenverzahnung genau dann vor, wenn zwei gepaarte Räder unter Einhaltung der Wälzbedingung mit einer passenden Zahnstange laufen, Bild 2, Bildteil 2.1, wobei man sich die Zahnstange von beiden Seiten im Eingriff vorstellen muß. Es sind dann folgende Bedingungen erfüllt: (R 1) Die beiden Wälzkreise wälzen zusammen mit der durch die Profilver-schiebung bestimmten Wälzgeraden der Zahnstange ab.

(R 2) Die Wälzgerade liegt tangential an beiden Wälzkreisen im momentanen Berührungspunkt der Wälzkreise an.

(R 3) Die momentanen Berührungspunkte der Flanken fallen mit je einem Punkt auf der gedachten Zahnstange zusammen.

(R 4) Die Verzahnung der Zahnrad-er läuft beim Abwälzen kollisionsfrei.

(R 5) Es liegen immer mindestens zwei Flankenberührungspunkte vor (hinreichende Überdeckung).

Durch die Punkte (R 1) bis (R 3) wird die Evolventenverzahnung für runde Räder definiert, während die Punkte (R 4) und (R 5) für eine lauffähige Verzahnung erfüllt sein müssen. Diese Definition kann man nun direkt auf Unrundräder übertragen. Zwei Unrundräder mit ihren vorgegebenen Wälzkurven müssen also mit einer passenden Zahnstange in der folgenden Weise laufen (Bild 2.2):

(U 1) Die beiden Wälzkurven wälzen zusammen mit der durch die Profilver-schiebung bestimmten Wälzgeraden der Zahnstange ab.

(U2) Die Wälzgerade liegt tangential an beiden Wälzkurven im momentanen Berührungspunkt der Wälzkurven an.

(U3) Die momentanen Berührungspunkte der Flanken fallen mit je einem Punkt auf der gedachten Zahnstange zusammen.

(U4) Die Verzahnung der Zahnräder läuft beim Abwälzen kollisionsfrei.

(U5) Es liegen immer mindestens zwei Flankenberührungspunkte vor (hinreichende Überdeckung).

Es ist evident, daß (U1) bis (U5) eine Verallgemeinerung von (R1) bis (R5) ist. Durch (U1) bis (U5) wird die Evolventenverzahnung für Unrundräder bestimmt. Zwischen einer runden Verzahnung (Wälzkurve ist ein Kreis oder ein Kreisbogen) und einer nichtrunden Verzahnung (Wälzkurve ist kein Kreis oder Kreisbogen) besteht ein entscheidender Unterschied: Die runde Verzahnung kann mit unterschiedlichen Zahnstangen abwälzen, während die nichtrunde Verzahnung nur mit genau einem Zahnstangenprofil – bestimmt durch Eingriffswinkel, Modul und Profilverschiebung – abwälzen kann! Das bedeutet insbesondere, daß die Profilverschiebung für nichtrunde Verzahnungen eindeutig festgelegt ist und das Gegenrad die entgegengesetzte Profilverschiebung aufweisen muß. Dabei wird das Vorzeichen der Profilverschiebung unabhängig von der Krümmung der Wälzkurve einheitlich so gewählt, wie es bei einer normalen Außenverzahnung üblich ist, so daß bei einem Krümmungswechsel die Profilverschiebung das Vorzeichen nicht wechselt!

2 Herstellung von unrunder Verzahnungen mit einer CNC-Wälzstoßmaschine

Vor Einführung von CNC-Werkzeugmaschinen war die Herstellung von Unrundrädern immer mit einer komplizierten und aufwendigen Änderung der Mechanik der Werkzeugmaschinen verbunden. Trotzdem wurden einige bemerkenswerte Resultate erzielt [1].

Heute lassen sich unrunde Verzahnungen sehr genau mit CNC-Wälzstoßmaschinen herstellen. Auszugehen ist hier von einer Wälzstoßmaschine, die mit einer Rundachse für das Schneidrad (C-Achse), einer Rundachse für das Werkstück (D-Achse) und einer Linearachse (X-Achse) für die Zustellbewegung ausgerüstet ist. Außerdem wird ein spezieller Schneidradhalter vorgesehen, der eine exakte exzentrische Aufspannung des Schneidrades ermöglicht.

Um die Bewegung der Achsen berechnen zu können, muß die Wälzkurve der Unrundverzahnung bekannt sein. Für die Verzahnung dreht sich die Wälzkurve um einen geeigneten Punkt, dem Drehpunkt des Werkrades, der mit dem Drehpunkt der D-Achse zusammenfällt.

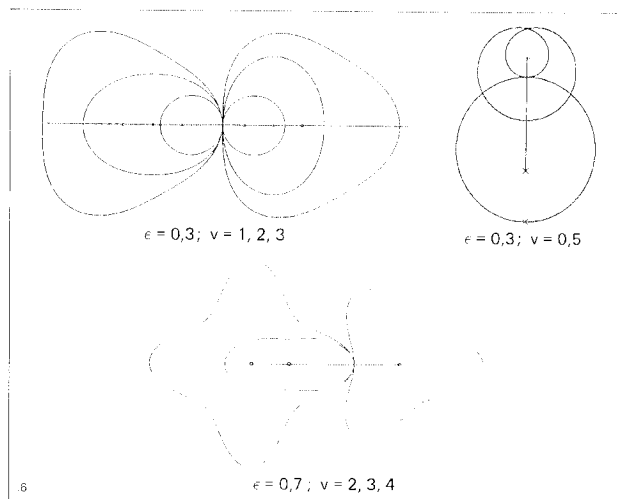


Bild 6. Beispiele von v-periodischen Ellipsen.

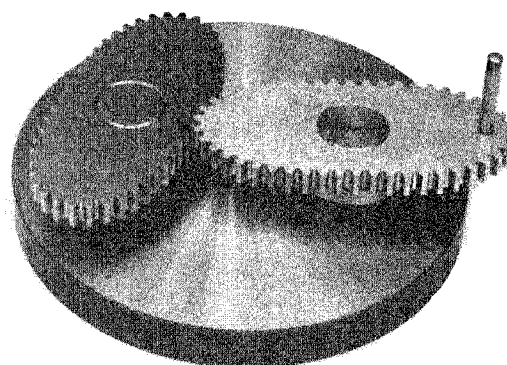


Bild 7. Paar von Ovalrädern, hergestellt mit passendem Schneidrad mit 22 Zähnen.

$\alpha = 22,002^\circ$, $m = 2,027$ mm, $x = 0$, $z = 46$

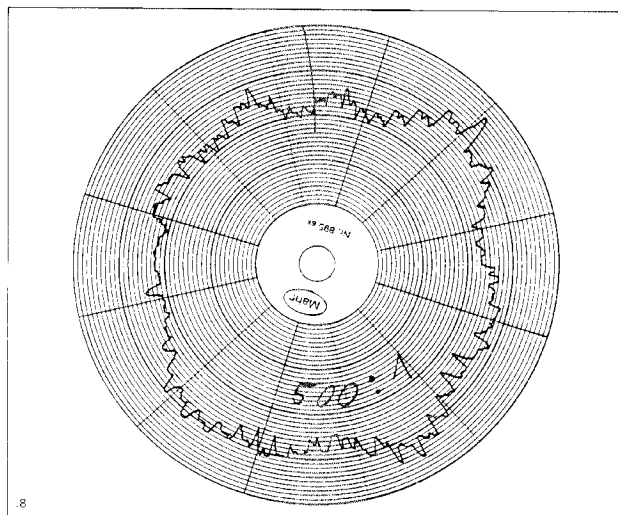


Bild 8. Zwei-flankenwälzdiagramm der Ovalräder nach Bild 7.

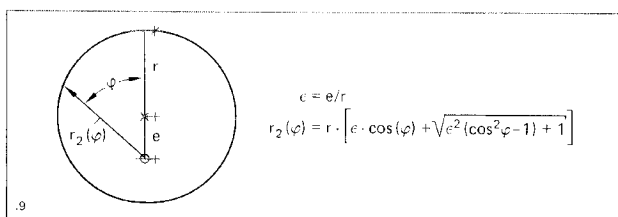


Bild 9. Zum Beispiel exzentrischer Kreis.

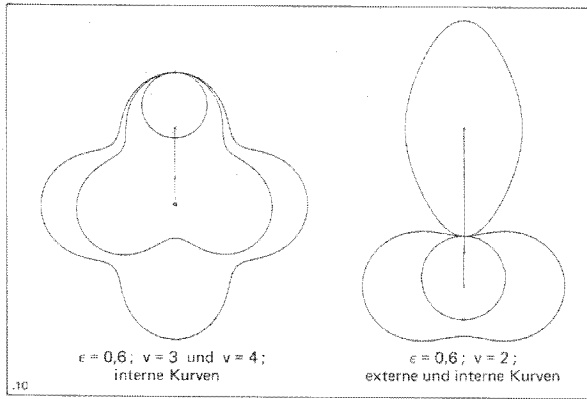


Bild 10. Gegenwärtigkeit von Kurven beim exzentrischen Kreis.

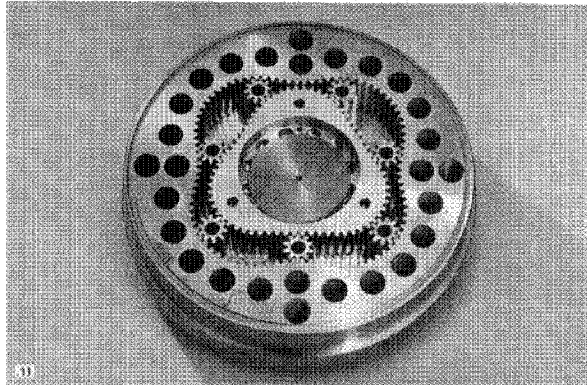
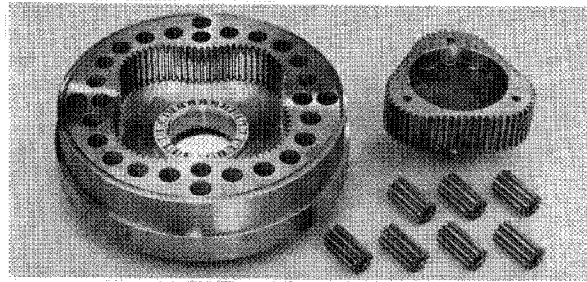


Bild 11. Verzahnungsbeispiel für einen Hydromotor des polnischen Herstellers Hydroster.

Verzahnung wird mit einem geeigneten Schneidrad, das einen bestimmten Betriebswälzkreis während der Verzahnung hat. Bezogen auf diesen Betriebswälzkreis muß gelten:

- Betriebsmodul des Schneidrades = gewünschter Modul des Werkrades,
- Betriebseingriffswinkel des Schneidrades = gewünschter Eingriffswinkel des Werkrades,
- Betriebsprofilverschiebung des Schneidrades = entgegengesetzte gewünschte Profilverschiebung des Werkrades (siehe Bemerkung am Schluß des vorhergehenden Abschnitts).

Im allgemeinen fällt der Mittelpunkt des Betriebswälzkreises nicht mit dem Drehpunkt der C-Achse zusammen, das heißt das Schneidrad wird exzentrisch aufgespannt. Das Unrundrad wird nun verzahnt, indem sich der Wälzkreis des Schneidrades auf der Wälzkurve des Unrundrades abwälzt. Dies wird erreicht durch ein geeignetes Verfahren der Achsen C, D und X. Die (Soll-)Bewegung der Achsen kann exakt berechnet werden für

eine beliebige Exzentrizität. Bild 3 zeigt eine beliebige Momentaufnahme.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Abhebewinkel ψ , der in Abhängigkeit von der Verzahnung bestimmte Grenzen nicht überschreiten darf. Er wird durch eine geeignete exzentrische Aufspannung des Schneidrades minimiert, so daß ohne Rückhubstreifen des Schneidrades möglichst schnell zugestellt werden kann.

3 Beispiele

Häufig soll für ein Paar von Unrundrädern der Achsabstand konstant sein. Man kann dann die Drehpunkte der Unrundräder auf die y-Achse legen, und wegen der Wälzbedingung muß nun auch der Berührungspunkt der beiden Wälzkurven auf der y-Achse liegen. Legt man den Drehpunkt des zweiten Unrundrades in den Nullpunkt des Koordinatensystems und bezeichnet den Achsabstand mit a , so erhält man nach Abschnitt 1.1 und gemäß Bild 4:

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} + r_1(\delta_1(t)) \cdot \begin{bmatrix} \sin(\gamma(t) + \pi) \\ \cos(\gamma(t) + \pi) \end{bmatrix} = r_2(\delta_2) \cdot \begin{bmatrix} \sin(\psi(t)) \\ \cos(\psi(t)) \end{bmatrix}$$

mit $\delta_1(t) = \beta(t) + \gamma(t)$, $\delta_2(t) = \varphi(t) + \psi(t)$.

Da der Berührungspunkt auf der y-Achse liegen muß, gilt $\gamma(t) \equiv 0$ und $\psi(t) \equiv 0$, und obige Gleichung reduziert sich zu:

$$a = r_1(\beta(t)) + r_2(\varphi(t)) \quad (3a)$$

Aus der Wälzbedingung erhält man:

$$-\frac{d\beta}{dt}(t) \cdot r_1(\beta(t)) = \frac{d\varphi}{dt}(t) \cdot r_2(\varphi(t)) \quad (3b)$$

Diese Gleichungen reduzieren sich für $t \equiv \varphi$ zu

$$a = r_1(\beta(\varphi)) + r_2(\varphi)$$

und

$$-\frac{d\beta}{d\varphi}(\varphi) \cdot r_1(\beta(\varphi)) = r_2(\varphi) \quad (4)$$

Für den durch Gl. (4) beschriebenen Fall sollen zwei Beispiele näher untersucht werden (siehe auch [2]):

- $r_1(\varphi)$ beschreibt eine Ellipse,
- $r_2(\varphi)$ beschreibt einen exzentrischen Kreis.

Beispiel Ellipse, Bild 5:

Man erhält aus Gl. (4) für einen gegebenen Achsabstand a :

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = \frac{q}{q - \frac{a}{b} \cdot (1 + \sqrt{1 - q \cdot \cos \varphi})} \quad (5)$$

Durch Integration erhält man $\beta(\varphi)$ und damit die Funktion $r_1(\beta)$. Als Anfangswert verwendet man $\beta(0) = 0$. Wir bezeichnen mit $\nu = 2\pi/\beta(2\pi)$ das Übersetzungsverhältnis, wobei ν natürlich eine beliebige positive reelle Zahl sein darf. Gibt man ν vor, so erhält man den zugehörigen Achsabstand a_ν durch:

$$a_\nu = c \cdot [1 \pm \sqrt{\nu^2(1 - \varepsilon^2) + \varepsilon^2}]$$

Man sieht, daß für ein Übersetzungsverhältnis zwei unterschiedliche Achsabstände existieren; im Fall „Ellipse“ sind aber die zugehörigen Gegenkurven identisch, Bild 6. Für $\nu = 1$ erhält man als Gegenkurve wieder eine Ellipse und für $\nu = 2$ ein sogenanntes Oval. Allgemein heißt die Gegenkurve ν -periodische Ellipse. Die ν -periodischen Ellipsen haben einige sehr interessante Eigenschaften. Zunächst kann man sie mit einer einfachen Formel schreiben:

Mit $c > 0$ und $0 < q \leq 1$ sei eine Ellipse nach Gl. (5) gegeben. Mit

$$\varepsilon = \sqrt{1 - q},$$

$$f = \frac{\varepsilon}{v^2 \cdot (1 - \varepsilon^2)}$$

und

$$g = \frac{\sqrt{v^2(1 - \varepsilon^2) + \varepsilon^2}}{v^2 \cdot (1 - \varepsilon^2)}$$

erhält man für die v -periodische Ellipse:

$$r_1'(\beta) = \frac{c}{g - f \cos(\nu\beta)} \quad (6)$$

Nun gilt das folgende ganz allgemeine Gesetz für v -periodische Ellipsen: Seien v_1 und v_2 reelle Zahlen größer als Null, so gilt, daß für eine geeignete Konfiguration mit konstantem Achsabstand die v_1 -periodische Ellipse mit der v_2 -periodischen Ellipse abwälzen kann, wobei die erzeugende Ellipse natürlich fest vorgegeben sei. Es ist also die Wälzbedingung in jedem Fall erfüllt. Jedoch müssen Kollisionsbetrachtungen extra durchgeführt werden. Bild 6 liefert hierzu einiges Anschauungsmaterial.

Bild 7 zeigt ein Paar Ovalräder, die mit einer Wälzstoßmaschine – wie in Abschnitt 2 beschrieben – hergestellt wurden. Das Zweiflankenwälzdiagramm in **Bild 8** zeigt deutlich, daß die Verzahnung nach dem Wälzstoßverfahren sehr genau hergestellt werden kann.

Abschließend sei zum Beispiel „Ellipse“ noch der Fall $v \rightarrow \infty$ untersucht, also die zu den v -periodischen Ellipsen gehörige Zahnstangenwälzkurve. Die Gleichung für diese Wälzkurve läßt sich aus Gl. (6) leicht herleiten durch folgende Operationen: Man transformiert Gl. (6) in kartesische Koordinaten, läßt $v \rightarrow \infty$ und $\beta \rightarrow 0$ gehen und erhält als Grenzfunktion zu einer durch c und q nach Gl. (5) gegebenen Ellipse folgende cos-Funktion:

$$y(x) = c \cdot \varepsilon \cdot \left(1 - \cos \frac{x}{c \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2}}\right) \quad (7)$$

$$\text{mit } \varepsilon = \sqrt{1 - q}.$$

Die Zahnstangenwälzkurve nach Gl. (7) wälzt also mit jeder v -periodischen Ellipse nach Gl. (6) ab, wobei die gemeinsame erzeugende Ellipse durch Gl. (5) gegeben ist.

Beispiel exzentrischer Kreis, Bild 9:

Man erhält aus Gl. (4) mit einem gegebenen Achsabstand a :

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = \frac{1 - \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2) - a \cdot (\sqrt{(\varepsilon \cdot \cos \varphi)^2 + (1 - \varepsilon^2)} - \varepsilon \cdot \cos \varphi)}$$

Durch Integration erhält man $\beta(\varphi)$ und damit die Funktion $r_1(\beta)$. Als Anfangswert verwendet man $\beta(0) = 0$. Mit

$$v = \frac{2\pi}{|\beta(2\pi)|}$$

sei wieder das Übersetzungsverhältnis bezeichnet, wobei v eine beliebige, positive, reelle Zahl sein darf. Im Gegensatz zum Beispiel „Ellipse“ gibt es jetzt weder für den Achsabstand a bei Vorgabe von v noch für $r_1'(\beta)$ eine geschlossene Lösung, vielmehr muß man v und r_1' numerisch ermitteln. Das bereitet jedoch keine größeren Schwierigkeiten, da die nichtlineare Funktion $v(a)$ (also Übersetzungsverhältnis in Abhängigkeit vom Achsabstand) numerisch leicht ermittelt werden kann und damit bei Vorgabe eines Übersetzungsverhältnisses v_0 die Gleichung

$$v_0 = v(a) \quad (8)$$

mit einem nichtlinearen Gleichungslöser gelöst werden kann.

Man erhält zwei Lösungen, einen größeren positiven Achsabstand und einen kleineren Achsabstand, der auch negativ sein kann. Im Gegensatz zum Beispiel „Ellipse“ sind nun die Gegenwälzkurven nicht mehr identisch für beide Achsabstände, **Bild 10**. Man erhält vielmehr eine „externe“ und eine „interne“ Gegenkurve, das heißt der exzentrische Kreis befindet sich immer außerhalb beziehungsweise immer innerhalb der Gegenkurve. Bei dem Beispiel „Ellipse“ ist also die externe Gegenkurve immer gleich der internen. Man kann sich diesen Sachverhalt gut mit Bild 10 verdeutlichen. Sofern keine Kollision auftritt, gilt allgemein:

Jede externe Kurve kann sich auf jeder internen Kurve extern abwälzen.

Jede externe Kurve kann sich auf jeder externen Kurve intern abwälzen.

Jede interne Kurve kann sich auf jeder internen Kurve intern abwälzen.

Zu einer beliebigen Wälzkurve $r(\varphi)$ kann man die Gegenkurve für $a \rightarrow \infty$ untersuchen und erhält allgemein die Gleichungen in kartesischen Koordinaten zu:

$$x(\varphi) = - \int_0^\varphi r(\tau) d\tau,$$

$$y(\varphi) = r(\varphi) - r(0) \quad (9)$$

Die Gegenkurve für $a \rightarrow \infty$ kann als Wälzkurve einer Zahnstange interpretiert werden. Auch für das Beispiel „exzentrischer Kreis“ kann – natürlich nur numerisch – eine Gegenkurve für $a \rightarrow \infty$ mit Gl. (9) berechnet werden. Für das Beispiel „Ellipse“ ist das Ergebnis ja durch Gl. (7) gegeben.

Als abschließendes Beispiel zeigt **Bild 11** die Verzahnung eines Hydromotors der Firma Hydroster [3]. Die Wälzkurve des Hohlrades wird nach Vorgabe der Wälzkurve des Planetenrades im Prinzip mit Hilfe der in Abschnitt 1.1 dargelegten Vorgehensweise ermittelt, indem zunächst die Bewegung eines Satellitenrades berechnet wird und dann damit die Wälzkurve des Hohlrades. Verzahnt wurde auf einer CNC-Wälzstoßmaschine nach Abschnitt 2. A 31322

Schrifttum

- [1] Hans, H.; Düschler, H.J.: Wälzstoßen mit Zusatzbewegungen. Vortrag auf dem Congrès Mondial des Engrenages, Paris, 22. bis 24. Juni 1977.
- [2] Olsson, U.: Non-circular Cylindrical Gears. Acta Polytechnica, Mechanical Engineering Series 135 (1953), Vol. 2, Nr. 10.
- [3] Beyer, R.: Ein „langsamer“ Hydromotor. Fluid (1979), Nr. 1, Januar.

Der Autor

Dr.-Ing. **Tilman Hasse**, Jahrgang 1949, studierte Mathematik an der TH Karlsruhe. Nach einer mehrjährigen Tätigkeit in der CNC-Softwareentwicklung ist er seit 1988 bei der Maschinenfabrik Lorenz, Ettlingen, in der Technischen Forschung tätig.