

# Unrundgetriebe mit deckungsgleichen unrunderen Zahnradern für typische Getriebeaufgaben

## *Design of gear drives with congruent non-circular gears*

**Inhalt** Seitdem es numerisch gesteuerte Verzahnmaschinen gibt und seitdem effiziente Software für die numerische Optimierung eingesetzt werden kann, werden Getriebeaufgaben zunehmend mit unrunderen Zahnradern gelöst. Diese Arbeit befasst sich speziell mit dem Problem, ein Unrundgetriebe mit deckungsgleichen Zahnradern für eine allgemeine Getriebeaufgabe optimal auszuliegen.

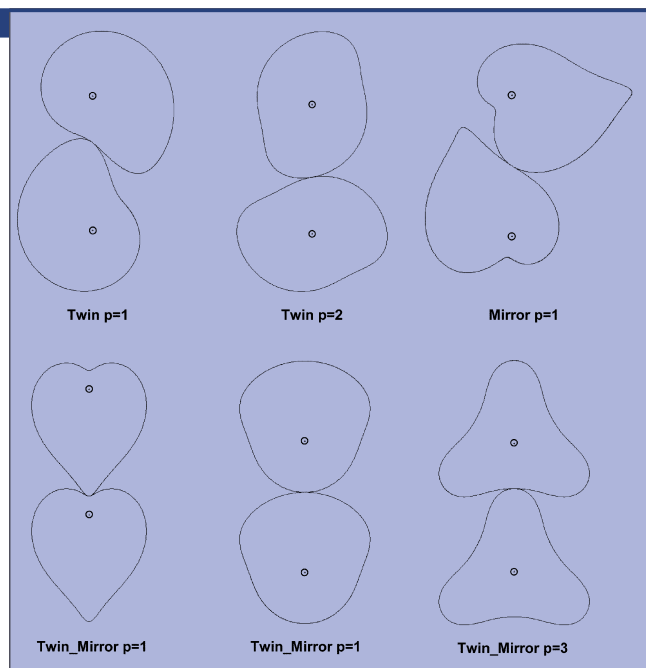
**Abstract** Since numeric controlled gear cutting machines are available and since efficient software for numeric optimization can be used, the solution of a kinematic mechanism problem will be solved more and more by means of non-circular gears. This paper particularly deals with the problem to optimally design a non-circular gear drive with congruent gears for general gear drive mechanisms.

### 1 Einleitung

Für ganz spezielle Anwendungsfälle wurden unrunder Zahnrad bereits seit 1935 verwendet, z. B. bei Durchflussmessern der Fa. Bopp & Reuter [1]. Anfang der fünfziger Jahre erschienen ausführliche Arbeiten über allgemeine Wälzkurven (Wälzkurve ist ein Synonym für Rollkurve, engl.: rolling curve) und deren Verzahnung [2]. Der Durchbruch für den Einsatz unrunder Zahnrad in der Technik kam aber erst, nachdem a) mit Einführung numerisch gesteuerter Verzahnungsmaschinen praktisch jede beliebige Wälzkurve in hoher Qualität verzahnt werden kann [3] und b) Wälzkurven für beliebige Getriebeaufgaben bezüglich unterschiedlichster Kriterien problemlos optimiert werden können. Unter einer Getriebeaufgabe wird hier die Auslegung eines Getriebezugs verstanden, der natürlich mindestens einen Satz unrunder Zahnrad (beziehungsweise ein unrunder Zahnrad mit passender Zahnstange) enthält. Darüber hinaus kann es ein Folgegetriebe enthalten, z.

**Bild 1**

Einige Beispiele deckungsgleicher Wälzkurven; die Periodizität  $p$  gibt an, wie oft sich ein Bewegungsablauf pro Umdrehung wiederholt, wenn sich eine der Wälzkurven mit konstanter Geschwindigkeit dreht



B. einen Kurbeltrieb, einen Kniehebeltrieb, ein Gelenkviereck und ähnliches. Für die Optimierung von Getriebezügen geeignete Kriterien können dabei sehr allgemein formuliert und etwa aus folgenden Bereichen zusammengestellt werden:

- Geometrie der Wälzkurven der unrunderen Zahnradern, zum Beispiel soll eine Wälzkurve in einem

vorgegebenen Drehwinkelbereich konzentrisch sein.

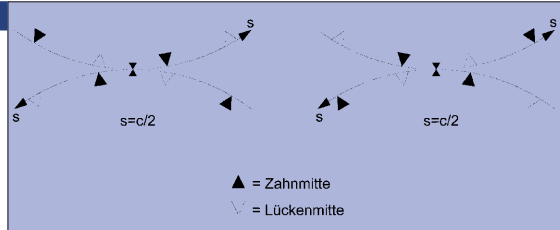
- Kinematik, zum Beispiel Vorgabe des Geschwindigkeitsverlaufs eines Getriebeteils, beispielsweise einer Welle oder eines Stößels, oder Geschwindigkeitsbegrenzung eines Getriebebauteils, etwa eines Kolbens, oder spezielle Positionsvorgaben eines Getriebebauteils innerhalb einer Periode und so weiter.

#### Autor

Dr.-Ing. T. Hasse  
Liebherr-Verzahntechnik GmbH  
Werk Ettlingen  
D-76275 Ettlingen  
e-mail: Tilman.Hasse@lvt.  
liebherr.com

Bild 2

Zahnposition im Fall TWIN zur Erzeugung identischer Verzahnungen



– Dynamik, Begrenzung der Beschleunigung bestimmter Getriebebauteile; Begrenzung der vom Getriebezug erzeugten Frequenzanteile; Nutzung der Eigenbewegung.

– Kostengünstige Herstellbarkeit der im Getriebezug verwendeten unrunder Zahnräder.

Zunächst soll ein ziemlich universell verwendbarer numerischer Ansatz für die Erzeugung der für die unrunder Zahnräder notwendigen Wälzkurven angegeben werden. Mit diesem Ansatz ist relativ problemlos eine Optimierung nach den vorn aufgeführten Kriterien möglich, wobei für die Optimierung eine gängige Variante des cg-Algorithmus verwendet werden kann [4]. Außerdem lassen sich für diesen Ansatz die Bedingungen für deckungsgleiche Wälzkurven leicht formulieren. Dabei heißen zwei Wälzkurven deckungsgleich, wenn sie sich mit mindestens einer der beiden folgenden Operationen zur Deckung bringen lassen:

- Translation einer Wälzkurve mit passender Drehung oder
- Spiegelung einer Wälzkurve und nachfolgend eine Translation mit passender Drehung.

Im ersten Fall wird von Zwillingenwälzkurven gesprochen (engl. twin rolling curves) oder kurz vom Wälzkurvenpaar vom Typ Twin; im zweiten Fall wird gesprochen von spiegelgleichen Wälzkurven (engl.: mirror rolling curves) oder kurz vom Wälzkurvenpaar vom Typ Mirror. Ein Wälzkurvenpaar vom Typ Twin-Mirror kann auf beide Arten zur Deckung gebracht werden. Die analytischen Bedingungen für deckungsgleiche Zahnräder sind schon seit langem bekannt und z. B. 1953 von Olsen [2] ausführlich erläutert worden. Hier wird die numerische Berechnung optimaler deckungsgleicher Unrunderzahnräder für eine allgemeine Getriebeaufgabe erläutert, wobei dies als Spezialfall der allgemeinen Aufgabe abgeleitet werden kann.

Zwei einfache deckungsgleiche Wälzkurvenpaare sind

– zwei gleiche Ellipsen, deren Drehpunkt im Brennpunkt liegt oder

– zwei gleiche Ovale, wobei in diesem Zusammenhang unter einem Oval eine 2-periodische Ellipse verstanden wird [2, 3].

In den Durchflussmessern gemäß [1] wird jeweils ein Paar Ovalzahnräder verwendet. Je zwei Ellipsen beziehungsweise Ovale oder i-periodische Ellipsen sind Wälzkurven vom Typ Twin-Mirror. In Bild 1 sind einige Wälzkurven vom Typ Twin, Mirror und Twin-Mirror gezeigt, wobei hier zur Anschauung einige extreme Formen abgebildet sind.

Folgende Gründe können für den Einsatz deckungsgleicher Unrunderäder sprechen:

- a) Spezielle geometrische Symmetrieforderungen, wie bei den Durchflussmessern oder bei Pumpen,
- b) logistische Gründe, bei denen nur ein Typ Unrunderad zu berücksichtigen ist, oder
- c) bezüglich der Fertigung ist es – speziell bei kleinen Losen – preiswerter, nur einen Typ Unrunderäder herzustellen.

Ist eine Getriebeaufgabe problemlos mit deckungsgleichen Unrunderädern lösbar, wird dies aus den vorn genannten Vorteilen sicherlich getan. In den folgenden Abschnitten wird eine Vorgehensweise für die Lösung einer Getriebeaufgabe mit deckungsgleichen Unrunderädern erläutert. Abschnitt 2 behandelt die Ermittlung des deckungsgleichen Wälzkurvenpaares, wobei einige praktische Tipps für die Durchführung der Berechnungen gegeben werden. Abschnitt 3 behandelt Fragen zur Verzahnung,

besonders auch die Zahnstellung betreffend, und in Abschnitt 4 wird zum Abschluss eine praktische Ausführung für einen Getriebezug mit Kurbeltrieb vorgestellt.

## 2 Allgemeine Ableitungen, Vorgehensweise für die Berechnung und einige Tipps

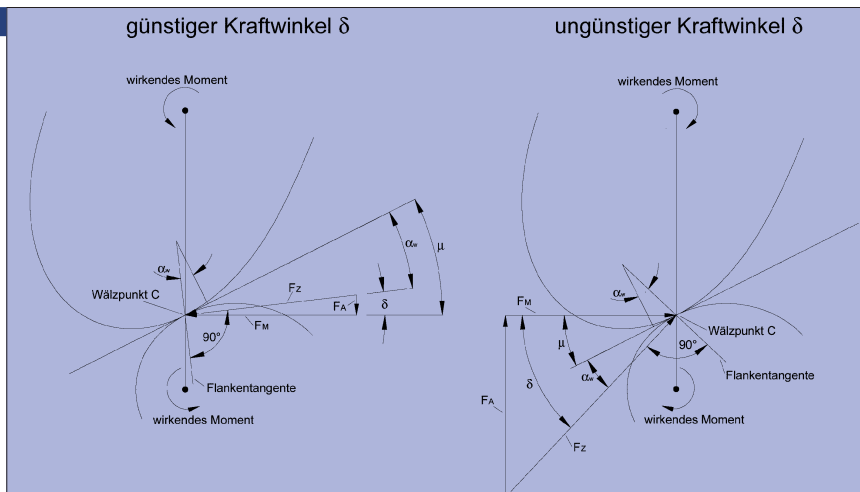
Die Ableitung der mathematischen Zusammenhänge ist angelehnt an die bereits in [5] gegebene Darstellung. Als Parameter wird zunächst wegen der besseren Anschauung die Zeit  $t$  gewählt. Das durchschnittliche Übersetzungsverhältnis der Antriebswelle und der Abtriebswelle des Unrundergetriebes sei natürlich 1 und für eine Umdrehung der Wellen werde die Zeitdauer  $T$  benötigt. Die Drehwinkel­funktion der Abtriebswelle werde mit  $\varphi_1$  und die der Antriebswelle mit  $\varphi_0$  bezeichnet. Damit sind  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$  periodische Funktionen mit der Periodendauer  $T$ . Die Ableitung nach dem (Zeit-) Parameter  $t$  werde – wie üblich – mit einem  $\dot{\phantom{x}}$  gekennzeichnet. Zweckmäßigerweise wird ausgegangen von den Drehwinkelgeschwindigkeiten  $\dot{\varphi}_0$  und  $\dot{\varphi}_1$ . Zusammenfassend ergibt sich mit der Festlegung der Vorzeichen, mit  $T$ =Periodendauer und mit der Grundkreisfrequenz  $\Omega = 2\pi / T$  für die Drehwinkelgeschwindigkeit der Abtriebswelle

$$\dot{\varphi}_1(t) < 0 \text{ mit } \int_0^T \dot{\varphi}_1(\tau) d\tau = -2\pi$$

mit der Drehwinkel­funktion

Bild 3

Für die Verzahnungsauslegung relevante Zahnkraft  $F_z$  bei günstigem und ungünstigem Kraftwinkel  $\delta$ ;  $\mu$  Tangentenwinkel;  $\alpha_w$  Betriebseingriffswinkel;  $F_M$  benötigte Kraft zur Erzeugung der wirkenden Momente;  $F_A$  Axialkraft. Zur Vereinfachung ist die Situation im Wälzpunkt C dargestellt



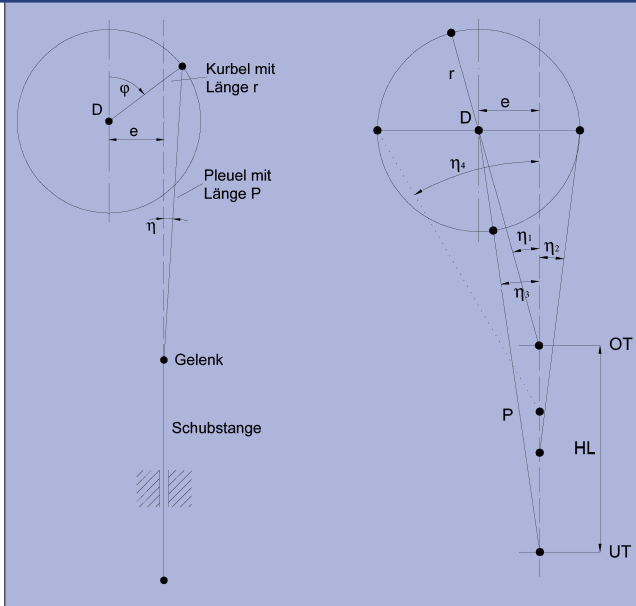


Bild 4

Versetzer (geschränkter) Schubkurbeltrieb. Hublänge  
 $HL = \frac{2rP}{\sqrt{(P+r)^2 - e^2} - \sqrt{(P-r)^2 - e^2}}$   
 Winkel  $\eta$  zwischen Schubstange und Pleuel  
 $\sin(\eta) = (r \cdot \sin(\varphi) - e) / P$ . Die Winkel  $\eta_1$  bis  $\eta_4$  geben die jeweiligen Extrempositionen an; OT oberer Totpunkt; UT unterer Totpunkt

$\dot{\varphi}_1$  und  $\dot{\varphi}_0$  sind so zu bestimmen, dass damit die Getriebeaufgabe mit hinreichender Genauigkeit optimal gelöst wird. Natürlich dreht sich die Antriebswelle in sehr vielen Anwendungsfällen mit konstanter Drehzahl, d. h.  $\dot{\varphi}_0(t) \equiv \Omega$ .

Andererseits ergibt sich aber auch, dass für beliebige periodische Funktionen  $\bar{\varphi}_1$  und  $\bar{\varphi}_0$  mit dem Parameter  $\bar{t}$  ein Wälzkurvenpaar durch Gln. 1.2 definiert wird. Mit diesem Wälzkurvenpaar ist ein Unrundgetriebe für eine bestimmte Getriebeaufgabe erzeugbar, und bei bekannter Drehwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_0$  der Antriebswelle ergibt sich sofort die Drehwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_1$  der Abtriebswelle.

Bezüglich der Drehwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_0$  sind grundsätzlich zwei Fälle zu unterscheiden:

- $\varphi_0$  ist fest vorgegeben, d. h., es wird angenommen, dass es keine Rückwirkungen auf den Antrieb gibt. Häufiger Spezialfall ist  $\dot{\varphi}_0 \equiv \Omega$ , also konstante Drehwinkelgeschwindigkeit der Antriebswelle.
- $\varphi_0$  ist unter Berücksichtigung von Rückwirkungen zu bestimmen [5]: Es können die Eigenbewegung des Getriebezugs und / oder die Wirkungen von Belastungsfunktionen innerhalb des Getriebezugs mit einbezogen werden.

Der Einfachheit halber werden die Ableitungen hier weitgehend nur für den Fall  $\dot{\varphi}_0 \equiv \Omega$  angegeben.

Vor den speziellen Ableitungen für deckungsgleiche Unrundräder ist noch kurz zu klären: Was heißt oder wie funktioniert es eigentlich, „eine Getriebeaufgabe mit hinreichender Genauigkeit optimal zu lösen?“ Dazu wird hier vorausgesetzt:

- Der Getriebezug ist kinematisch bis auf das Unrundgetriebe eindeutig definiert,
- das Unrundgetriebe ist mit der Vorgabe einer endlichen Variablenzahl (eine Realisierung) eindeutig definiert und damit auch die Kine-

$$\varphi_1(t) = \int_0^t \dot{\varphi}_1(\tau) d\tau.$$

Dabei ist die Drehwinkelgeschwindigkeit der Antriebswelle

$$\dot{\varphi}_0(t) > 0 \text{ mit } \int_0^T \dot{\varphi}_0(\tau) d\tau = 2\pi$$

mit der Drehwinkelfunktion

$$\varphi_0(t) = \int_0^t \dot{\varphi}_0(\tau) d\tau. \quad (1.1)$$

Die Drehwinkelfunktionen seien hinreichend glatt; z. B. seien  $\dot{\varphi}_0$  und  $\dot{\varphi}_1$  stetig und es gelte für  $i=0,1$

$$\dot{\varphi}_i(0) = \dot{\varphi}_i(T)$$

$$\ddot{\varphi}_i(0) = \ddot{\varphi}_i(T). \quad (1.2)$$

Sind die Drehwinkelgeschwindigkeitsverläufe bestimmt, so sind die für einen Achsabstand  $a$  benötigten Rollkurven  $r_0(t)$  und  $r_1(t)$  bestimmbar. Diese Rollkurven werden auch weni-

ger präzise als Wälzkurven bezeichnet. Für einen Zeitpunkt  $t$  ergibt sich

$$u(t) = \frac{\dot{\varphi}_1(t)}{\dot{\varphi}_0(t)} = -\frac{r_0(t)}{a - r_0(t)} = -\frac{a - r_1(t)}{r_1(t)}$$

mit  $a$ =Achsabstand.

Es ergeben sich die jeweiligen Polarkoordinaten

$$(r_0(t); \varphi_0(t)) \text{ und } (r_1(t); \varphi_1(t)) \quad (1.3)$$

und das Übersetzungsverhältnis  $u(t)$ .

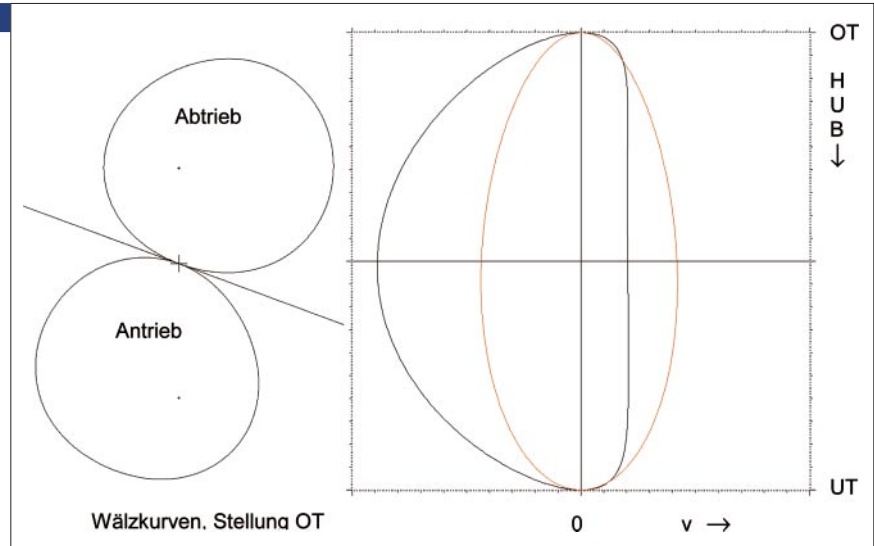
Damit ergeben sich zu den einzelnen Winkelpositionen die passenden Radien. Überdies sind dann auch leicht die Umfänge der Kurven bestimmbar, aus denen sich nach Vorgabe der Zähnezahl  $z$  der Modul  $m$  für die Verzahnung ergibt. Der Modul ändert sich natürlich proportional zum Achsabstand.

Verwendet werden jetzt die Gln. 1.2 in zwei unterschiedlichen Zusammenhängen.

Einerseits sei  $t$  der reale Zeitparameter im Zusammenhang mit einer bestimmten Getriebeaufgabe. Die Drehwinkelgeschwindigkeiten

Bild 5

Geschwindigkeit  $v$  der Schubstange im Vergleich mit und ohne Unrundgetriebe über dem Hub (vertikal); Arbeitshub von OT nach UT;  $P=400$  mm;  $HL=120$  mm;  $e=40$  mm. Das Unrundgetriebe ist vom Typ TWIN\_MIRROR,  $p=1$



matik des gesamten Getriebezugs berechenbar (Getriebezugrealisierung), und  
 c) es existiert eine Bewertungsfunktion, mit der die Abweichung von den gewünschten Soll-Daten für eine Getriebezugrealisierung ermittelt wird (üblicherweise gewichtete Fehlerquadratmethode, wobei Ungleichungen zugelassen werden) [4].  
 Es gilt, diese Bewertungsfunktion zu minimieren, wobei dafür eine Variante des cg-Verfahrens verwendbar ist. Zum Beispiel lässt sich für den Fall  $\dot{\varphi}_0 \equiv \Omega$  folgender Fourierreihenansatz machen:

$$\dot{\varphi}_1 = - \left( \Omega + \sum_{i=1}^m A_i \sin(i\Omega t + \psi_i) \right) \quad (1.4)$$

mit den 2m-Variablen  $A_1, \dots, A_m, \dots$  und  $\psi_1, \dots, \psi_m$ .

Hier wird zunächst m=1 gesetzt, dann die Optimierung durchgeführt und geprüft, ob die Ergebnisse hinreichend genau sind; wenn nicht, wird der Vorgang wiederholt mit m=2 und so weiter, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Die praktische Durchführung ist nicht ganz so einfach, wie hier beschrieben, weil zum einen die Ergebnisse sehr von den Wichtungsparametern abhängen und zum anderen die vielen in der Einleitung erwähnten Randbedingungen berücksichtigt werden müssen. Das Berechnungsprinzip wird aber deutlich. Es ist auch klar, dass die Zahl m der Oberwellen möglichst klein zu wählen ist, um möglichst glatten Bewegungsablauf zu erreichen. Etwaige Begrenzungen der Beschleunigung von Getriebeteilen sind in der Bewertungsfunktion zu berücksichtigen.

Für die folgende Ableitung eines Wälzkurvenpaars vom Typ Twin wird vorausgesetzt, dass die beiden Wälzkurven im Zeitbereich in einer ganz bestimmten Weise aufeinander abrollen und somit auf jeden Fall die Gln. 1.1 bis 1.3 erfüllt sind. Um eine Verwechslung mit den Funktionen und dem Zeitparameter der hier genannten Getriebeaufgabe zu verhindern, wird die Kennzeichnung durch  $\bar{\cdot}$  verwendet (s.vorn). Es ergibt sich:

$$\bar{u}(\bar{t}) = \frac{1}{\bar{u}(c-\bar{t})} = \frac{\dot{\bar{\varphi}}_1(\bar{t})}{\dot{\bar{\varphi}}_0(\bar{t})} = \frac{\dot{\bar{\varphi}}_0(c-\bar{t})}{\dot{\bar{\varphi}}_1(c-\bar{t})} \quad (1.5a)$$

Dabei lässt sich annehmen, dass gilt:

$$\dot{\bar{\varphi}}_1(\bar{t}) = -\dot{\bar{\varphi}}_0(c-\bar{t}) \quad \text{bzw.} \quad \bar{r}_1(\bar{t}) = \bar{r}_0(c-\bar{t}) \quad \text{und} \quad \dot{\bar{\varphi}}_0(\bar{t}) = -\dot{\bar{\varphi}}_1(c-\bar{t}) \quad \text{bzw.} \quad \bar{r}_0(\bar{t}) = \bar{r}_1(c-\bar{t}) \quad (1.5b)$$

Anschaulich bedeutet Gl. 1.5b, dass das Abrollen für gleiche Positionen beziehungsweise gleiche Radien auch gleich sein soll – bezogen auf die Drehwinkelgeschwindigkeiten –, was sicher immer erzwingbar ist. Als Ansatz für  $\dot{\bar{\varphi}}_1$  wird eine Fourierreihe gewählt:

$$\dot{\bar{\varphi}}_1(\bar{t}) = - \left( \Omega + \sum_{i=1}^m A_i \sin(ip\Omega\bar{t} + \psi_i + i\delta) \right)$$

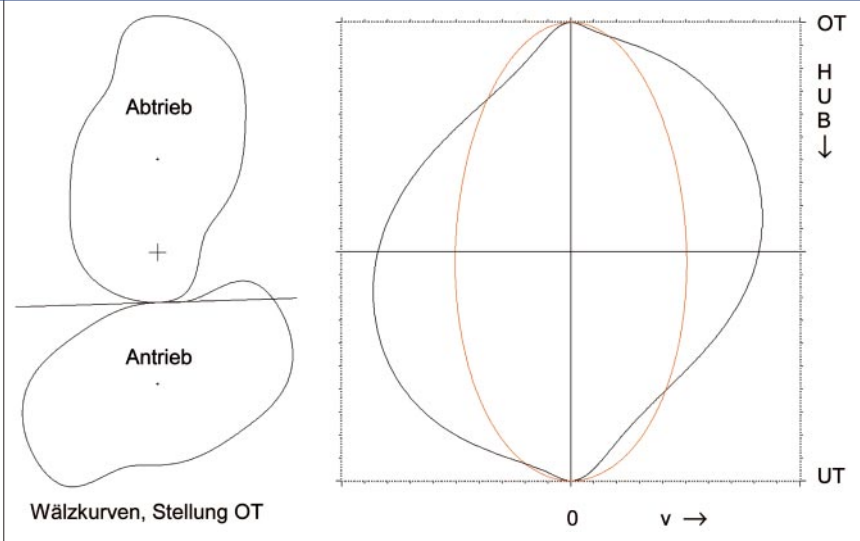


Bild 6

**Geschwindigkeit v der Schubstange im Vergleich mit und ohne Unrundgetriebe; zwei Arbeitsbereiche beim OT und beim UT; P=400 mm; HL=80 mm; e=0 mm. Das Unrundgetriebe ist vom Typ TWIN\_MIRROR, p=2**

mit  
 p Periodizität  
 m Anzahl der Frequenzen  
 A<sub>i</sub> Koeffizienten  
 ψ<sub>i</sub> Phasenverschiebungen  
 δ Laufzeitverschiebung  
 Ω 2π/τ (1.6a)

Die Periodizität p=1, 2, ...n ist der Drehwinkelgeschwindigkeitsverlauf, der sich pro Umdrehung p-mal wiederholt.

Der Ansatz Gl. 1.6a ist überbestimmt, da aus rechentechnischen Gründen die Laufzeitverschiebung als besondere Variable eingeführt wird. Deshalb ist ψ<sub>i</sub> geeignet fest vorgegeben.

Aus Gl. 1.6a ergibt sich wegen Gl. 1.5b:

$$\dot{\bar{\varphi}}_0(\bar{t}) = \Omega + \sum_{i=1}^m A_i \sin(ip\Omega\bar{t} - i\eta - \psi_i + \pi + i\delta);$$

p · η = Ω · c · δ, A<sub>1</sub>, ..., A<sub>m</sub>, ψ<sub>2</sub>, ..., ψ<sub>m</sub> sind frei wählbare Variable und ψ<sub>1</sub> = 0 wird fest vorgegeben. (1.6b)

Zu erkennen ist, dass für m=1 für ein Unrundgetriebe vom Typ Twin bereits drei Variable zu bestimmen sind: A<sub>1</sub>, η und δ. δ verändert die Wälzkurven in der Form natürlich nicht, sondern es wird die geeignete Startposition für die Getriebeaufgabe ermittelt.

Für ein Wälzkurvenpaar vom Typ Mirror wird im Prinzip gleich vorgegangen. Es ergibt sich

$$\bar{u}(\bar{t}) = \frac{1}{\bar{u}(\bar{t}+c)} = \frac{\dot{\bar{\varphi}}_1(\bar{t})}{\dot{\bar{\varphi}}_0(\bar{t})} = \frac{\dot{\bar{\varphi}}_0(\bar{t}+c)}{\dot{\bar{\varphi}}_1(\bar{t}+c)} \quad (1.7a)$$

Damit soll gelten:

$$\dot{\bar{\varphi}}_1(\bar{t}) = -\dot{\bar{\varphi}}_0(\bar{t}+c) \quad \text{und} \quad \dot{\bar{\varphi}}_0(\bar{t}) = -\dot{\bar{\varphi}}_1(\bar{t}+c) \quad (1.7b)$$

Mit dem Ansatz Gl. 1.6a ergibt sich aus Gl. 1.7b

$$\dot{\bar{\varphi}}_0(\bar{t}) = \Omega + \sum_{i=1}^m A_i \sin(ip\Omega\bar{t} - i\pi + \psi_i + i\delta)$$

mit p · c · Ω = π, also: c = π / (2 · p)

und den frei wählbaren Variablen δ, A<sub>1</sub>, ..., A<sub>m</sub>, ψ<sub>2</sub>, ..., ψ<sub>m</sub> wird ψ<sub>1</sub> = 0 wieder fest vorgegeben. (1.8)

Der Fall „Twin\_Mirror“ ergibt sich, indem in die Gl. 1.6b und 1.8 eingesetzt werden:

$$\eta = \pi \quad \text{und} \quad \psi_i = \pi/2, i = 1, 2, \dots$$

und damit sind die Variablen δ, A<sub>1</sub>, ..., A<sub>m</sub> (1.9) frei wählbar.

Mit den Gln. 1.6b, 1.8 beziehungsweise 1.9 sind die Parameter gegeben, die für eine Optimierung eines Unrundgetriebes mit deckungsgleichen Unrundzahnradern für eine Getriebeaufgabe zur Verfügung stehen. Vorgegeben ist im Zeitbereich die Drehung der Antriebswelle mit der Drehwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_0(t)$ , wobei zur Vereinfachung zunächst der Fall  $\dot{\varphi}_0(t) \equiv \Omega$  betrachtet wird. Damit ergibt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen dem Zeitparameter t und dem Parameter  $\bar{t}$  und es ergeben sich:

$$\begin{aligned} a) \quad \Omega t &= \int_0^{\bar{t}} \dot{\varphi}(\tau) d\tau \Rightarrow t(\bar{t}) = \frac{\int_0^{\bar{t}} \dot{\varphi}(\tau) d\tau}{\Omega} \\ b) \quad \dot{\varphi}_1(t) &= \frac{\Omega \cdot \dot{\bar{\varphi}}_1(\bar{t})}{\dot{\bar{\varphi}}_0(\bar{t})} \\ c) \quad \varphi_1(t) &= \int_0^t \dot{\varphi}_1(\tau) d\tau = \int_0^{\bar{t}} \dot{\bar{\varphi}}_1(\tau) d\tau \quad (1.10) \end{aligned}$$

Mit Gl. 1.10 lässt sich das Bewegungsverhalten des gesamten Getriebezugs ermitteln und damit ist die Optimierung bewertbar. Dreht sich die Antriebswelle nicht mit kon-

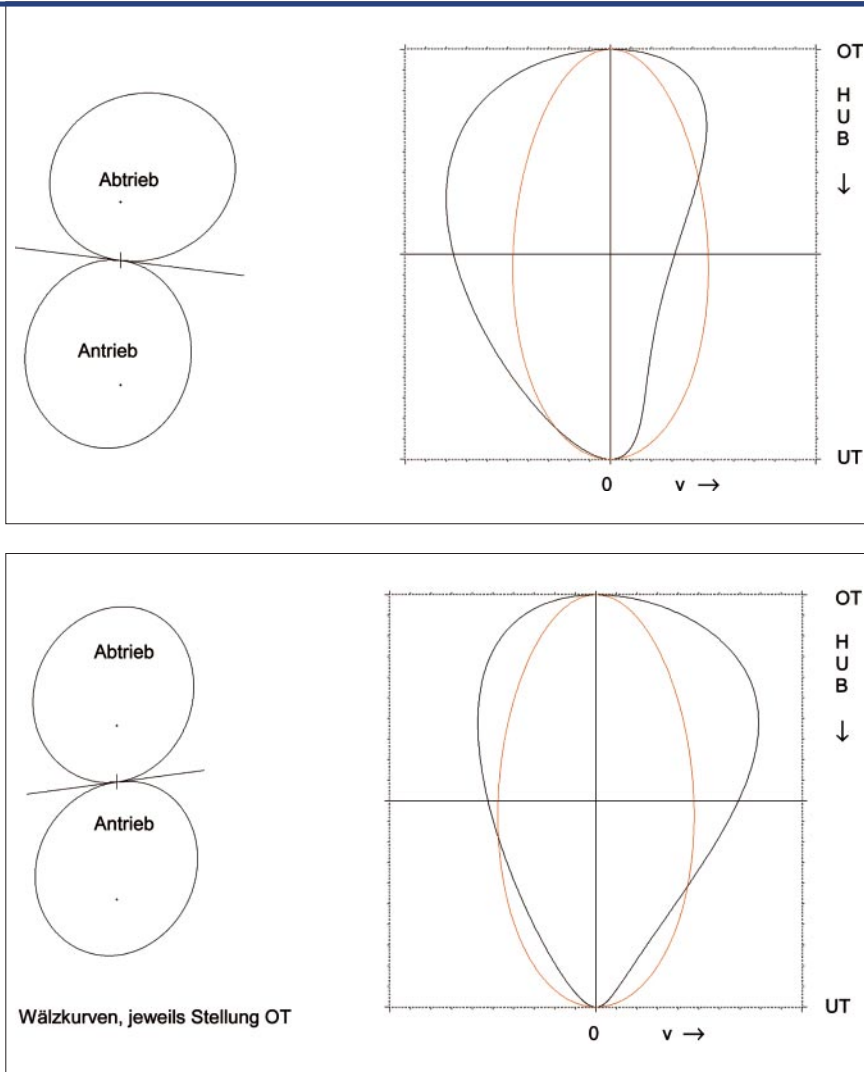


Bild 7a und b

a) Beispiel für Pressenantrieb; b) Kalibrieren von Werkzücken: Geschwindigkeit  $v$  der Schubstange im Vergleich mit und ohne Unrundgetriebe über dem Hub (vertikal) – zwei verschiedene Stellungen der Unrundräder zum Kurbeltrieb ermöglichen Verläufe für unterschiedliche Anwendungen ohne den Kurbeltrieb oder die Unrundräder zu ändern;  $P=400$  mm;  $HL=120$  mm;  $e=0$  mm. Das Unrundgetriebe ist vom Typ TWIN,  $p=1$

stanter Geschwindigkeit, so wird Gl. 1.10 eine nichtlineare Gleichung, deren Lösung unproblematisch ist. In Gl. 1.10 b wird  $\Omega$  einfach durch  $\dot{\varphi}_0(t)$  ersetzt.

### 3 Über die Verzahnungsauslegung von unrunder Zahnrädern mit deckungsgleichen Wälzkurven

Die Verzahnung muss das Verzahnungsgrundgesetz erfüllen, d. h., die Verbindungslinie zwischen dem Wälzpunkt und dem momentanen Flankenberührungspunkt muss senkrecht zur Flankentangente sein. Es zeigt sich,

dass durch eine gedachte und unendlich dünne Zahnstange, deren Wälzgerade im Wälzpunkt eines Wälzkurvenpaares tangential an den Wälzkurven anliegt, gerade eine in diesem Sinn verallgemeinerte Evolventenverzahnung generiert wird [2, 3, 6]. Für die Verzahnung ergibt sich dabei die Profilverschiebung aus dem Abstand zwischen der Wälzgeraden und der Profilmittellinie der Zahnstange. Speziell in [6] wird genau auf die Auslegung einer Evolventengeradverzahnung für unrunde Wälzkurven einschließlich der Verzahnung im Wälzstoßverfahren mit „normalen“ Schneidrädern eingegangen. Korrekturen der Zahnflanken können auch ausgeführt werden (z. B. Flankenkopfrücknahme oder leichte Balligkeit der Zahnflanken [7]).

Für ein Paar Unrundräder mit deckungsgleichen Wälzkurven ist es wünschenswert, auch die Verzahnung deckungsgleich zu erzeugen. Dazu ist die Profilverschiebung 0 notwendig, was im Folgenden vorausgesetzt wird. Der Umfang der Wälzkurven sei mit  $U$  bezeichnet, und die Radiusfunktion  $r$  wird – ausgehend von einer Position – in Abhängigkeit der Bogenlänge  $s$  angegeben: Es gilt damit  $r(s)$ . Damit er-

gibt sich im Fall „Twin“ für einen Wälzvorgang:

Start:  $r(0)+r(c)=a$   
 mit  $a$ =Achsabstand und einer Konstanten  $c$ , wobei  
 $0 \leq c < U$  und  
 beliebiger Wälzposition  
 $r(s)+r[(c-s) \bmod U]=a$  (2.1)  
 wobei „mod“ Modulo bedeutet.

Es ergibt sich sofort, dass für  $s = \frac{c}{2}$  auf beiden Rädern dieselbe Position erhalten wird und für die Verzahnung ergibt sich dann die in Bild 2 dargestellte Situation, um auf beiden Rädern eine identische Verzahnung zu verwirklichen.

Im Fall „Mirror“ ergibt sich eine andere Situation. Es läßt sich zeigen, dass gilt:

$$r(s) + r\left(\left(s + \frac{U(1+2i)}{p \cdot 2}\right) \bmod U\right) = a \quad (2.2)$$

Der Beweis muss indirekt geführt und soll hier nicht ausgeführt werden. Aus Gl. 2.2 ergibt sich für die zu wählende Zähnezah  $z$  im Fall „Mirror“:

$v > 2$  sei eine ungerade Zahl, z. B. 3, 5, 7 und so weiter.

Dann muss  $z$  für identische Verzahnung wie folgt gewählt werden: (2.3)

$$Z = \begin{cases} v \text{ für } p \text{ ungerade} \\ 2^k \cdot v \text{ für } p \text{ gerade und } p = 2^k \cdot l, l \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Ist Gl. 2.3 im Fall „Mirror“ erfüllt, so kann das Unrundräderepaar in einer Aufspannung (Paketspannung) im Wälzstoßverfahren beliebig verzahnt werden. Nach der Verzahnung wird ein Rad gewendet und passend mit dem anderen Rad mit dem vorgesehenen Achsabstand abgewälzt. Damit ergibt sich eine sehr einfache und zugleich genaue Herstellmöglichkeit, da das Schneidrad nicht (oder nur „grob“, falls eine bestimmte Zahnstellung gewünscht wird) ausgerichtet werden muss. Bei dieser Vorgehensweise sind nur Räder einer Paketspannung untereinander austauschbar; sind Räder unterschiedlicher (Paket-)Aufspannungen untereinander auszutauschen, so ist das Schneidrad für alle Aufspannungen einheitlich mit hoher Genauigkeit zu positionieren.

Die Tragfähigkeit wird im Wesentlichen nach DIN 3990 berechnet, wobei allerdings die wirkende Kraft am Zahn abweichend von der DIN zu berechnen ist (s. Bild 3, [8]). Wird mit  $\mu$  der Tangentenwinkel bezeichnet, der sich zwischen der Tangente im momentanen Wälzpunkt  $C$  und der Senkrechten ergibt, und mit  $F_M$  die Nennkraft, die sich aus den angreifenden Momenten ergibt und damit senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Drehpunkte wirkt, so ergibt sich für die Normalkraft am Zahn  $F_Z$ :

$$F_Z = \frac{F_M}{\cos(\alpha_w - \text{sgn}(F_M)\mu)}$$

$\alpha_w$ : Betriebseingriffswinkel  
 $\mu$  und  $F_M$  sind vorzeichenbehaftet!

Mit Gl. 2.4 wird der Maximalwert  $F_{Z\text{-max}}$  ermit-

telt. Der für die Tragfähigkeitsberechnung üblicherweise benötigte Wert für die Nennumfangskraft  $F_N$  ergibt sich dann zu

$$F_N = F_{Z-\max} \cdot \cos(\alpha_W). \quad (2.5)$$

Die Überdeckung ist bei Unrundgetrieben meist größer als 1,5. Damit lässt sich problemlos eine Tragfähigkeitsberechnung mit üblichen Hilfsmitteln durchführen.

#### 4 Kurbeltrieb als Folgegetriebe

Als Beispiel wird ein Unrundgetriebe mit nachfolgendem Kurbeltrieb gewählt, eine Kombination, die im Maschinenbau vielfach angewandt werden könnte (Bild 4). Die Abtriebswelle des Unrundgetriebes ist gleichzeitig Hubwelle mit dem Drehpunkt D. Wird während einer Hubwellenumdrehung ein Arbeitshub (z. B. von OT nach UT) und ein Rückhub ohne Lasteinwirkung (von UT nach OT) durchfahren, so wird oft ein geeigneter Versatz  $e$  angewandt, um bei großer Belastung im Arbeitshub den Winkel  $\eta$  zwischen Schubstange und Pleuel klein zu halten.

Für viele Prozesse ist es vorteilhaft, wenn während des Arbeitshubes eine gleichmäßige Hubgeschwindigkeit eingehalten werden kann und gleichzeitig der Rückhub schnell erfolgt. Bild 5 zeigt hierfür eine Ausführung. Zu erkennen ist der sehr gleichmäßige Geschwindigkeitsverlauf der Hubstange im Arbeitsbereich bei der Ausführung mit Unrundgetriebe. Mitte Arbeitshub ist die Geschwindigkeit nur halb so groß wie bei der Ausführung ohne Unrundgetriebe. Das Unrundgetriebe ist hier vom Typ Twin\_Mirror mit der Periodizität  $p=1$ .

Bild 6 zeigt eine Ausführung, bei der beim oberen und beim unteren Totpunkt deutlich die Geschwindigkeit unterschiedlich ist, d.h., die Geschwindigkeit wird reduziert. Auch hier eignet sich ein Unrundgetriebe vom Typ Twin\_Mirror. Die Periodizität  $p$  ist 2, d. h., dass während einer Umdrehung des Antriebsrads beim Abtrieb zweimal der gleiche Drehgeschwindigkeitsablauf erfolgt.

Bild 7 zeigt dagegen eine Ausführung, die beispielsweise für einen Pressenantrieb verwendet werden könnte. Die Anordnung des Unrundgetriebes im Bild 7a erzeugt einen Ge-

schwindigkeitsverlauf der Schubstange, der beim Tiefziehen erwünscht ist. Nur durch eine andere Positionierung der Unrundräder wird ein Geschwindigkeitsverlauf geschaffen, der im Bild 7b dargestellt ist. Dieser Geschwindigkeitsverlauf wäre besonders zum Kalibrieren von Werkstücken geeignet.

Diese Beispiele zeigen deutlich, dass für viele Aufgaben deckungsgleiche Unrundräder verwendet werden können. Die Forderung der Deckungsgleichheit ist sicher eine Restriktion und damit nicht in jedem Fall anwendbar.

Die vorgestellten Beispiele beziehen sich auf einen Kurbeltrieb als Folgegetriebe. Ein weiteres in der Praxis häufig verwendetes Folgegetriebe ist die Kurbelschwinge. Auch für die Kombination Unrundgetriebe-Kurbelschwinge gibt es bereits ausgereifte Software und es existieren in der Praxis zahlreiche Anwendungsfälle.

#### 5 Ausblick

Wie gezeigt wurde, kann eine Getriebeaufgabe optimal mit deckungsgleichen Unrundrädern gelöst werden. Löst eine Auslegung auch die Aufgabe hinreichend gut, so lassen sich wegen der Vorteile auch deckungsgleiche Unrundräder für die Getriebeablösung verwenden; andernfalls muss die Restriktion der Deckungsgleichheit fallen gelassen werden.

Für die Tragfähigkeitsberechnung des Unrundgetriebes wird der Nennkraftverlauf während einer Umdrehung benötigt (die Nennkraft wirkt im Wälzpunkt senkrecht zur Verbindungslinie der Drehpunkte, siehe vorn). Dieser Nennkraftverlauf ist am leichtesten zu erhalten, indem der gesamte Getriebezug im Zeitbereich berechnet wird. Ein typisches Beispiel für einen Getriebezug wäre: Antrieb mit Schwungrad, Vorgelege, Unrundgetriebe, Folgegetriebe und Lasteinwirkungen. Eine solche Simulation erfolgt meist mit einem Modell aus 1-D-Starrkörpern (1 Freiheitsgrad: entweder Rotation oder Translation), die durch Verbindungselemente (z. B. Feder, Kurbeltrieb, Unrundgetriebe, Antrieb usw.) miteinander gekoppelt sind.

#### Literatur

- [1] Eberle, J.: Zur Theorie des Ovalradzählers. VDI-Z 108 (1966) H. 12
- [2] Olsson, U.: Non-circular cylindrical gears. Acta Polytech., Mech. Engng. Series 135 (1953) Vol. 2, Nr. 10
- [3] Hasse, T.: Verzahnung für Unrundräder hoher Qualität. VDI-Z 132 (1990) H. 6, S. 55–59
- [4] Großmann, Ch.; Terreno, J.: Numerik der Optimierung. Stuttgart: Teubner Studienbücher 1997
- [5] Hasse, T.: Auslegung ungleichförmiger Bewegungsgetriebe mit unrunder Zahnrädern und steuerbarem Antrieb unter Berücksichtigung der Bilanz der kinetischen Energie. VDI-Bericht 1423. Düsseldorf: 1998, S. 171–191
- [6] Hasse, T.: WAELZ – Das LORENZ-Entwicklungssystem zur Herstellung und Berechnung beliebiger Rollkurven und deren Verzahnung sowie zur Herstellung der Verzahnung beliebiger Rollkurven mit LORENZ-Wälzstoßmaschinen, 2. Aufl. Ettlingen: Masch.fabr. LORENZ GmbH 1997
- [7] N.N.: LORENZ Verzahnwerkzeuge – Ein Handbuch für Konstruktion und Betrieb, 3. Aufl. Ettlingen: Masch.fabr. LORENZ GmbH 1977
- [8] Wyrwa, K.; Braune, R.: Unrunde Zahnräder – Auslegung, Herstellung, Einsatzmöglichkeiten. VDI-Bericht 1423. Düsseldorf: VDI 1998, S. 271–288