

# Über die vielfältigen Möglichkeiten, unrunde Zahnräder für typische Getriebeaufgaben der Technik optimal auszulegen

Autor: Dr.-Ing. T. Hasse

## **Zusammenfassung:**

*Seitdem numerisch gesteuerte Verzahnmaschinen verfügbar sind und seitdem effiziente Software für die numerische Optimierung eingesetzt werden kann, erfolgt die Lösung von Getriebeaufgaben zunehmend mit unrunder Zahnrädern. In dieser Arbeit wird zunächst skizziert, wie man mit Optimierungsstrategien eine Getriebeaufgabe mit unrunder Zahnrädern lösen kann. Anhand von vier Beispielen wird im Hauptteil die Leistungsfähigkeit dieser Vorgehensweise demonstriert. Abschließend werden einige Aspekte zur Tragfähigkeitsberechnung, zur Herstellung und zur Qualitätssicherung von unrunder Zahnrädern erläutert.*

## **I Einleitung**

Für ganz spezielle Anwendungsfälle werden unrunde Zahnräder bereits seit 1935 verwendet, z. B. bei Durchflussmessern der Fa. BOPP & REUTER /1/. Anfang der fünfziger Jahre erschienen ausführliche Arbeiten über allgemeine Wälzkurven (Wälzkurve ist ein Synonym für Rollkurve, engl.: rolling curve) und deren Verzahnung /2/. Der Durchbruch für den Einsatz unrunder Zahnräder in der Technik kam aber erst, nachdem

1. mit Einführung numerisch gesteuerter Verzahnungsmaschinen praktisch jede beliebige Wälzkurve in hoher Qualität verzahnt werden kann /3/ und
2. Wälzkurven für beliebige Getriebeaufgaben bezüglich unterschiedlichster Kriterien problemlos optimiert werden können.

Dabei ist der 2. Punkt im Wesentlichen Gegenstand dieser Arbeit, wobei der Schwerpunkt auf Beispiele gesetzt wird. Unter einer Getriebeaufgabe verstehen wir hier die Auslegung eines Getriebezuges, der natürlich mindestens einen Satz unrunder Zahnräder (bzw. ein unrunder Zahnrad mit passender Zahnstange) enthält und darüber hinaus ein Folgegetriebe enthalten kann, z. B. einen Kurbeltrieb, einen

Kniehebeltrieb, ein Gelenkviereck usw.. Für die Optimierung von Getriebezügen geeignete Kriterien können dabei sehr allgemein formuliert werden und etwa aus folgenden Bereichen zusammengestellt werden:

- *Geometrie der Wälzkurven der unrunder Zahnräder:* Z. B. soll eine Wälzkurve in einem vorgegebenen Drehwinkelbereich konzentrisch sein; ein Paar deckungsgleicher Wälzkurven soll zur Anwendung kommen
- *Kinematik:* Z.B. Vorgabe des Geschwindigkeitsverlaufs eines Getriebeteils (beispielsweise einer Welle oder eines Stößels); Geschwindigkeitsbegrenzung eines Getriebebauteils, etwa eines Kolbens; spezielle Positionsvorgaben eines Getriebebauteils innerhalb einer Periode usw.
- *Dynamik:* Begrenzung der Beschleunigung bestimmter Getriebebauteile; Begrenzung der vom Getriebezug erzeugten Frequenzanteile; Ausnutzung der Eigenbewegung
- Kostengünstige Herstellbarkeit der im Getriebezug verwendeten unrunder Zahnräder

In Abschnitt II wird kurz ein ziemlich universell einsetzbarer Ansatz für die Erzeugung der für die unrunder Zahnräder notwendigen Wälzkurven vorgestellt, mit dem relativ problemlos eine Optimierung nach den oben aufgeführten Kriterien möglich ist. Dieser Ansatz kann auch so modifiziert werden, dass für die Optimierung nur deckungsgleiche Unrunder Verwendung finden, was für bestimmte Geometrieforderungen, aber auch aus logistischen Gründen oder aus Gründen der preiswerten Herstellbarkeit, vorteilhaft sein kann. Die Optimierung kann mit einer gängigen Variante des cg-Algorithmus durchgeführt werden /4/.

Weil also unrunder Zahnräder relativ problemlos passend für eine spezielle Getriebeaufgabe ausgelegt werden können und dann auch mit hoher Qualität relativ preiswert hergestellt werden können, werden unrunder Zahnräder in vielen Bereichen der Technik zunehmend eingesetzt. Dazu gehören Verpackungsmaschinen, Textilmaschinen, Hydromotoren, Pumpen, Durchflussmesser, Maschinen der Umformtechnik (*Walzen, Pressen, Ziehen, Biegen, Schmieden*) und zahlreiche Spezialmaschinen.

Im Hauptteil des Vortrages werden einige mit Erfolg realisierte Getriebeaufgaben vorgestellt:

1. Ein Getriebezug für eine Presse mit Kurbeltrieb
2. Ein Getriebe mit Gelenkviereck und der Vorgabe, dass ein großer Bereich der unrunder Zahnräder konzentrisch ausgebildet ist
3. Ein Getriebe für einen Hydromotor
4. Zahnstangengetriebe; insbesondere auch ein Getriebe mit schräggestellter "normaler" Zahnstange

Beendet wird der Vortrag mit einem Ausblick auf einige Aspekte zur Tragfähigkeitsberechnung, Herstellung und Qualitätssicherung von unrunder Zahnrädern.

## II. Allgemeine Ableitungen und Vorgehensweise für die Berechnung

Für die Ableitung der mathematischen Zusammenhänge lehnen wir uns an die bereits in /5/ gegebene Darstellung an. Als Parameter wählen wir zunächst wegen der besseren Anschauung die Zeit  $t$ . Das durchschnittliche Übersetzungsverhältnis der Antriebswelle und der Abtriebswelle des Unrundgetriebes sei  $1$  (das ist keine wesentliche Einschränkung) und für eine Umdrehung der Wellen werde die Zeitdauer  $T$  benötigt. Die Drehwinkelfunktion der Abtriebswelle werde mit  $\varphi_1$  und die der Antriebswelle mit  $\varphi_0$  bezeichnet. Damit sind  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$  periodische Funktionen mit der Periodendauer  $T$ . Die Ableitung nach dem (Zeit-) Parameter  $t$  werde - wie üblich - mit einem  $\bullet$  gekennzeichnet. Zweckmäßigerweise gehen wir von den Drehwinkelgeschwindigkeiten  $\dot{\varphi}_0$  und  $\dot{\varphi}_1$  aus und erhalten zusammenfassend mit der Festlegung der Vorzeichen:

$T =$  Periodendauer,  $\Omega = 2\pi / T =$  Grundkreisfrequenz

### Drehwinkelgeschwindigkeit der Abtriebswelle

$$\dot{\varphi}_1(t) < 0 \text{ mit } \int_0^T \dot{\varphi}_1(\tau) d\tau = -2\pi \text{ mit der Drehwinkelfunktion } \varphi_1(t) = \int_0^t \dot{\varphi}_1(\tau) d\tau$$

### Drehwinkelgeschwindigkeit der Antriebswelle

$$\dot{\varphi}_0(t) > 0 \text{ mit } \int_0^T \dot{\varphi}_0(\tau) d\tau = 2\pi \text{ mit der Drehwinkelfunktion } \varphi_0(t) = \int_0^t \dot{\varphi}_0(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

Die Drehwinkelfunktionen seien hinreichend glatt; z.B. seien  $\dot{\varphi}_0$  und  $\dot{\varphi}_1$  stetig und es gelte für  $i=0,1$  :

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_i(0) &= \dot{\varphi}_i(T) \\ \ddot{\varphi}_i(0) &= \ddot{\varphi}_i(T)\end{aligned}\tag{1.2}$$

Sind die Drehwinkelgeschwindigkeitsverläufe bestimmt, so können die für einen Achsabstand  $a$  benötigten Rollkurven  $r_0(t)$  und  $r_1(t)$  - diese werden auch weniger präzise als Wälzkurven bezeichnet - bestimmt werden.

Man erhält für einen Zeitpunkt  $t$ :

$$u(t) = \frac{\dot{\varphi}_1(t)}{\dot{\varphi}_0(t)} = \frac{-r_0(t)}{a - r_0(t)} = \frac{a - r_1(t)}{-r_1(t)} \text{ mit } a = \text{Achsabstand}\tag{1.3}$$

Es ergeben sich die jeweiligen Polarkoordinaten  $(r_0(t); \varphi_0(t))$  und  $(r_1(t); \varphi_1(t))$  und das Übersetzungsverhältnis  $u(t)$ .

Damit ergeben sich zu den einzelnen Winkelpositionen die passenden Radien. Überdies können nun auch leicht die Umfänge der Kurven bestimmt werden, aus denen sich nach Vorgabe der Zähnezahl  $z$  der Modul  $m$  für die Verzahnung ergibt. Der Modul ändert sich natürlich proportional zum Achsabstand.

Zu den Gleichungen (1.1) bis (1.3) sind einige Bemerkungen notwendig:

- B1 Wir beschränken uns hier auf umlaufende Unrundgetriebe. Eine Modifikation der Gleichungen (1.1) bis (1.3) für nicht umlaufende Getriebe ist problemlos möglich.
- B2 In vielen Anwendungsfällen dreht sich die Antriebswelle mit konstanter Drehzahl, d. h.  $\dot{\varphi}_0(t) \equiv \Omega$ .
- B3 Bei einer Auslegung geht es zunächst primär um die Bestimmung der Drehwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_1(t)$  der Abtriebswelle. Dabei kann  $\dot{\varphi}_1(t)$  natürlich pro Umdrehung mehrmals denselben Geschwindigkeitsablauf wiederholen. Man sagt dann, dass  $\dot{\varphi}_1(t)$  die Periodizität  $p$  hat, wobei für umlaufende Getriebe  $p \geq 1$  natürlich ganzzahlig sein muss.

- B4 Hat die Drehwinkelgeschwindigkeit der Abtriebswelle  $\dot{\varphi}_1(t)$  die Periodizität  $p$ , so kann natürlich das durchschnittliche Übersetzungsverhältnis ein Teiler von  $p$  sein. Z. B. sei  $p=4$ , so kann man durch leichte Modifikation von (1.1) das Getriebe so gestalten, dass bei einer Drehung der Antriebswelle um  $720^\circ$  sich die Abtriebswelle um  $360^\circ$  dreht, das durchschnittliche Übersetzungsverhältnis also 2 ist.
- B5 Eine ganzzahlige durchschnittliche Übersetzung ins Schnelle ist natürlich immer möglich.

Es soll nun kurz geklärt werden: Was heißt bzw. wie funktioniert eigentlich "eine Getriebeaufgabe mit hinreichender Genauigkeit optimal lösen?" Dazu setzen wir hier voraus:

1. Der Getriebezug ist kinematisch bis auf das Unrundgetriebe eindeutig definiert
2. Das Unrundgetriebe ist durch Vorgabe einer endlichen Anzahl von Variablen (eine Realisierung) eindeutig definiert und damit auch die Kinematik des gesamten Getriebezuges berechenbar (Getriebezugrealisierung).
3. Es existiert eine Bewertungsfunktion, mit der die Abweichung von den gewünschten Soll-Daten für eine Getriebezugrealisierung ermittelt wird (üblicherweise gewichtete Fehlerquadratmethode, wobei Ungleichungen zugelassen werden) /4/.

Es gilt nun diese Bewertungsfunktion zu minimieren, wobei dafür eine Variante des cgVerfahrens verwendet werden kann. Zum Beispiel kann man für den Fall  $\dot{\varphi}_0(t) \equiv \Omega$  folgenden Fourierreihenansatz machen:

(1.4)

$$\varphi_1(t) = -\left(\Omega + \sum_{i=1}^m A_i \sin(ip\Omega + \psi_i)\right) \text{ mit den } 2m \text{ Variablen } A_1, \dots, A_m \text{ und } \psi_1, \dots, \psi_m; p: \text{Periodizität}$$

Man setzt dann zunächst  $m=1$ , führt die Optimierung durch und schaut, ob die Ergebnisse hinreichend genau sind; wenn nicht, wiederholt man den Vorgang mit  $m=2$  usw. bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Natürlich ist die praktische Durchführung nicht ganz so einfach, wie hier beschrieben, weil zum einen die Ergebnisse stark von den Wichtungsparemtern abhängen und zum anderen die vielen in der Einleitung erwähnten

Randbedingungen auch berücksichtigt werden müssen; aber das Berechnungsprinzip wird deutlich. Es ist auch klar, dass man hier die Anzahl  $m$  der Oberwellen möglichst klein wählt, um einen möglichst glatten Bewegungsablauf zu erzielen; etwaige Begrenzungen der Beschleunigung bzw. der Geschwindigkeit von Getriebeteilen müssen in der Bewertungsfunktion berücksichtigt werden.

Für periodische Prozesse ist ein Fourierreihenansatz gemäß (1.4) sehr geeignet, da mit ihm automatisch besonders glatte Lösungen erzeugt werden können, die überdies auch mehr oder weniger - je nach Getriebezug - frequenzoptimal sind. Natürlich sind Modifikationen von (1.4) möglich, etwa um Symmetrieeigenschaften zu erzwingen. Weiter kann auch ein nicht konstanter Drehgeschwindigkeitsverlauf des Antriebsrades berücksichtigt werden und es ist sogar die Optimierung mit Berücksichtigung der Eigenbewegung des Getriebezuges möglich /5/.

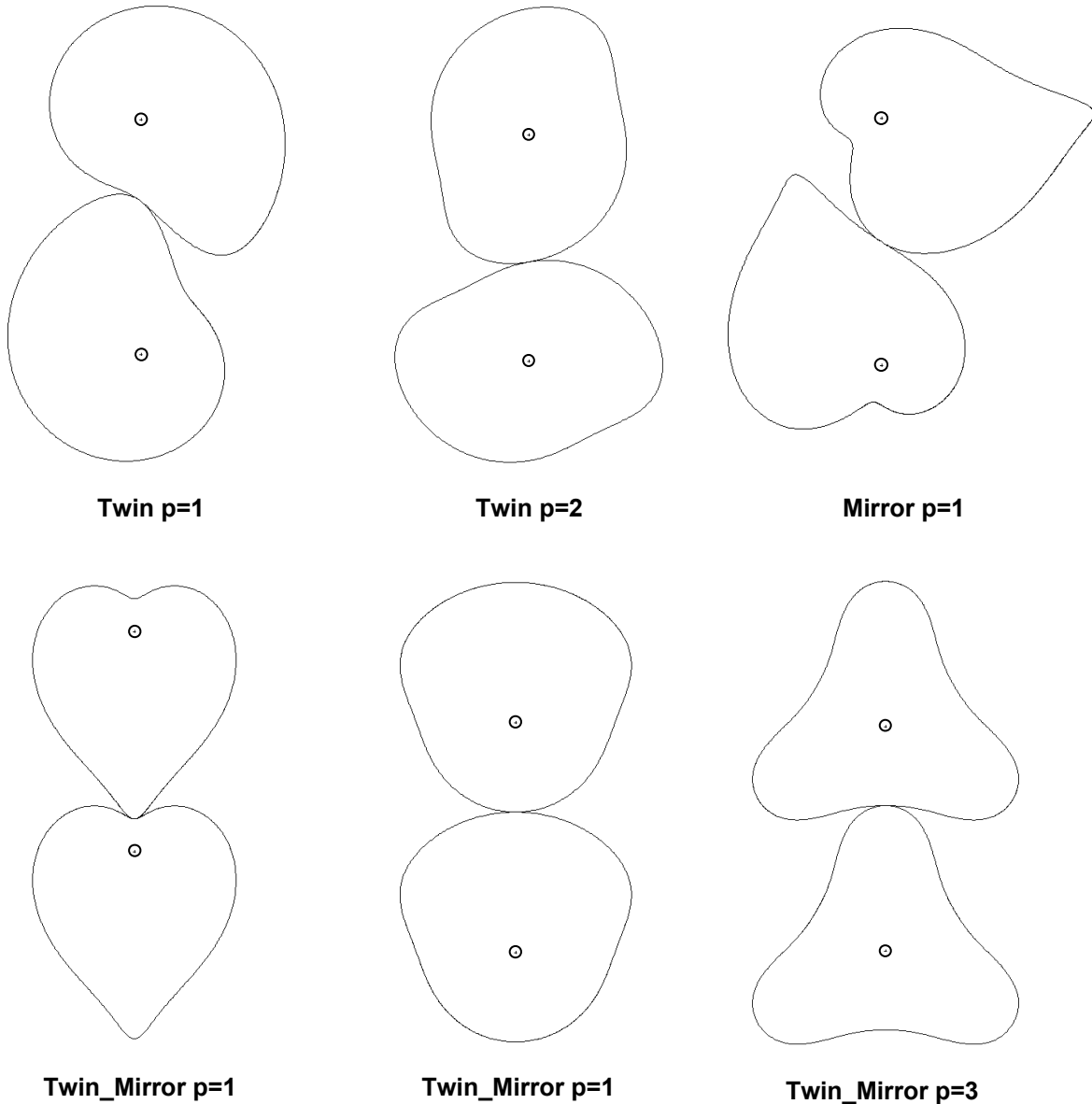
Schauen wir uns nochmals die grundlegende Gleichung (1.3) an. Man erkennt, dass für jede Realisierung von Funktionen  $\phi_0$  und  $\phi_1$  gemäß (1.1) ein Unrundgetriebe mit /1.3/ berechnet werden kann. Dabei kann  $t$  als allgemeiner Parameter aufgefasst werden. Nun können leicht Bedingungen so angegeben werden, dass deckungsgleiche Wälzkurven entstehen. Dabei heißen zwei Wälzkurven deckungsgleich, wenn sie durch mindestens eine der beiden folgenden Operationen zur Deckung gebracht werden können /6/:

- Translation einer Wälzkurve mit passender Drehung
- Spiegelung einer Wälzkurve und nachfolgend eine Translation mit passender Drehung

Im ersten Fall spricht man von Zwillingswälzkurven (engl. twin rolling curves) oder kurz: Wälzkurvenpaar vom Typ Twin; im zweiten Fall spricht man von spiegelgleichen Wälzkurven (engl.: mirror rolling curves) oder kurz: Wälzkurvenpaar vom Typ Mirror. Ein Wälzkurvenpaar vom Typ Twin-Mirror kann auf beide Arten zur Deckung gebracht werden. Die analytischen Bedingungen für deckungsgleiche Zahnräder sind schon seit langem bekannt und z. B. 1953 von Olsen in /2/ ausführlich erläutert worden. Zwei einfache deckungsgleiche Wälzkurvenpaare sind:

- Zwei gleiche Ellipsen, deren Drehpunkt im Brennpunkt liegt
- Zwei gleiche Ovale, wobei man in diesem Zusammenhang unter einem Oval eine 2-periodische Ellipse versteht /2/, /3/

In den Durchflussmessern gemäß /1/ wird jeweils ein Paar Ovalzahnräder verwendet. Je zwei Ellipsen bzw. Ovale bzw. p-periodische Ellipsen sind Wälzkurven vom Typ Twin-Mirror. In Bild 1 sind einige Wälzkurven vom Typ Twin, Mirror und Twin-Mirror gezeigt, wobei hier zur Anschauung einige extreme Formen abgebildet sind.



**Bild 1**

Einige Beispiele von deckungsgleichen Wälzkurven; die Periodizität  $p$  gibt an, wie oft sich ein Bewegungsablauf pro Umdrehung wiederholt, wenn sich eine der Wälzkurven mit konstanter Geschwindigkeit dreht.

Folgende Gründe können für den Einsatz deckungsgleicher Unrundräder sprechen:

1. Spezielle geometrische Symmetrieforderungen, wie z. B. bei den Durchflussmessern bzw. bei Pumpen
2. Logistische Gründe: Man hat es nur mit einem Typ Unrundrad zu tun
3. Fertigungstechnisch gesehen ist es insbesondere bei kleinen Losgrößen preiswerter, nur einen Typ Unrundräder herstellen zu müssen

Kann man eine Getriebeaufgabe problemlos mit deckungsgleichen Unrundrädern lösen, wird man dies aus den oben genannten Vorteilen natürlich tun.

Zunächst wird also mit dem Ansatz (1.4) bzw. mit dem Ansatz für deckungsgleiche Unrundräder ein Unrundgetriebe berechnet, das kinematische Vorgaben für den Getriebezug erzwingt. Häufig verwendete kinematische Vorgaben sind folgende:

- Punktgenaue Vorgaben, d. h. ein Bauteil des Getriebezuges soll zu einem bestimmten Zeitpunkt innerhalb der Periode eine vorgegebene Position und/oder eine vorgegebene Geschwindigkeit haben.
- Ein Bauteil des Getriebezuges (z. B. ein Werkzeug) soll einen bestimmten (Arbeits-) Bereich besonders schnell oder besonders langsam oder mit einem definierten Geschwindigkeitsverlauf durchfahren.
- Die Rückführung zum Arbeitsbereich soll schnell erfolgen
- Eine maximal zulässige Geschwindigkeit eines Bauteils (z. B. eines Kolbens) darf nicht überschritten werden.
- Ein Bauteil soll sich zu einem anderen Bauteil während einer bestimmten Zeitspanne synchron bewegen.

Neben diesen Vorgaben achtet man bei der Berechnung immer darauf, dass die maximale



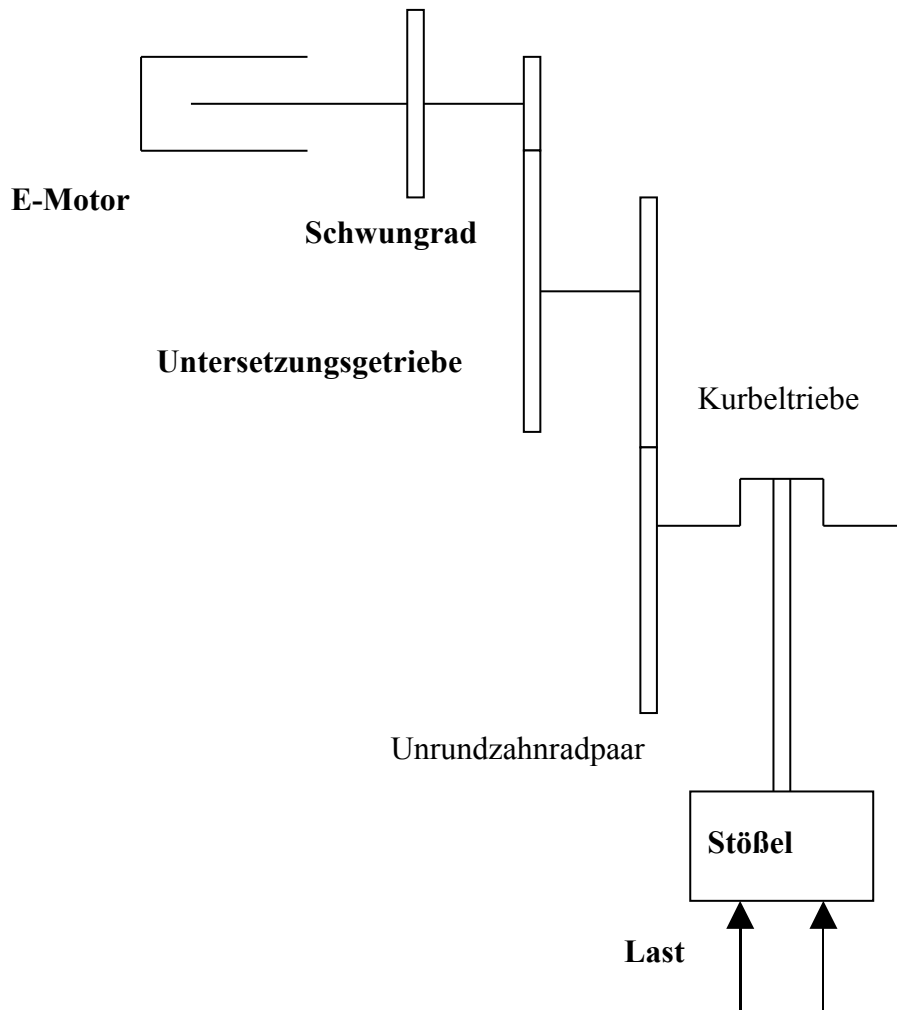
Drehwinkelbeschleunigung der Abtriebswelle möglichst klein bleibt, damit die Unrundräder nicht unnötig kompliziert werden. Und natürlich versucht man auch die Massenträgheit schwerer Bauteile durch die Beschleunigungsbegrenzung passender Bauteile klein zu halten.

Hat man nun ein kinematisch optimales Unrundgetriebe berechnet, so muss man anschließend die Ausmaße der Unrundräder festlegen, indem man den Modul, die Zähnezahl und die Zahnradbreite mit einer Tragfähigkeitsberechnung geeignet bestimmt. Für die Tragfähigkeitsberechnung benötigt man zunächst die maximal auftretende Nennkraft an der Verzahnung der Unrundräder, die im Allgemeinen mit Hilfe einer Getriebezugsimulation im Zeitbereich bestimmt wird. Die Tragfähigkeitsberechnung erfolgt im Wesentlichen nach DIN 3990, wobei allerdings die wirkende Kraft am Zahn abweichend von der DIN ermittelt werden muss (s. hierzu /6/). Schließlich muss darauf geachtet werden, dass die Unrundräder für den vorgesehenen Anwendungsfall hinreichend gut ausgewuchtet werden.

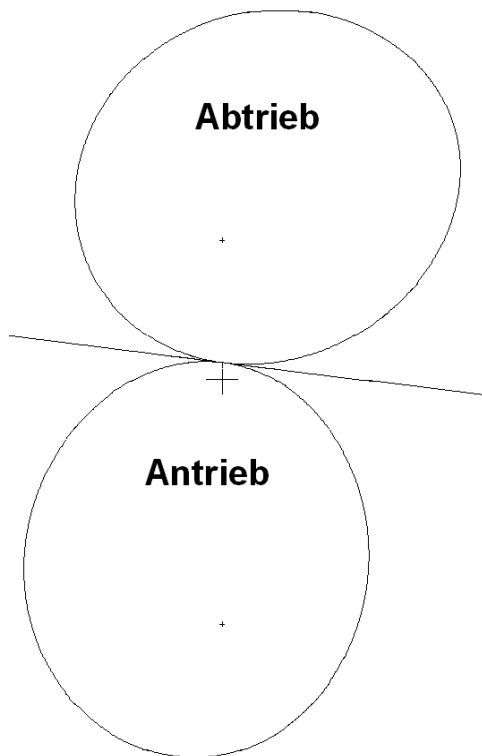
### **III. Beispiele für die Anwendung von Unrundgetrieben**

#### **1. Kurbeltrieb als Folgegetriebe für Anwendung in Exzenterpressen**

Als erstes Beispiel wird ein Unrundgetriebe mit nachfolgendem Kurbeltrieb gewählt, eine Kombination, die im Maschinenbau vielfach angewendet werden könnte. Wir wollen hier den Einsatz für einen Pressenantrieb vorstellen. Dazu sei die Abtriebswelle des Unrundgetriebes gleichzeitig die Hubwelle des Kurbeltriebs. Ein so aufgebauter Getriebezug für eine Presse ist im Bild 2 schematisch dargestellt. Man sieht die typische Anordnung von Motor, Schwungrad und Vorgelege. Nach dem Vorgelege wird das Unrundgetriebe angeordnet und über den Kurbeltrieb erfolgt die Stößelbewegung. Für Umform und Kalibriervorgänge interessiert nun die Stößelbewegung von ca. Hubmitte bis zum unteren Totpunkt (UT). Der Geschwindigkeitsverlauf sollte in diesem Bereich langsam und gleichmäßig verlaufen. In Bild 3 wird eine Auslegung des Unrundgetriebes mit deckungsgleichen Unrundrädern vorgestellt. Je nach Einstellung der Unrundräder relativ zur Hubwelle erhält man unterschiedliche Geschwindigkeitsverläufe des Stößels über dem Hub. So zeigt Bild 4 einen Verlauf, der sich zum Beispiel zum Tiefziehen gut eignet.

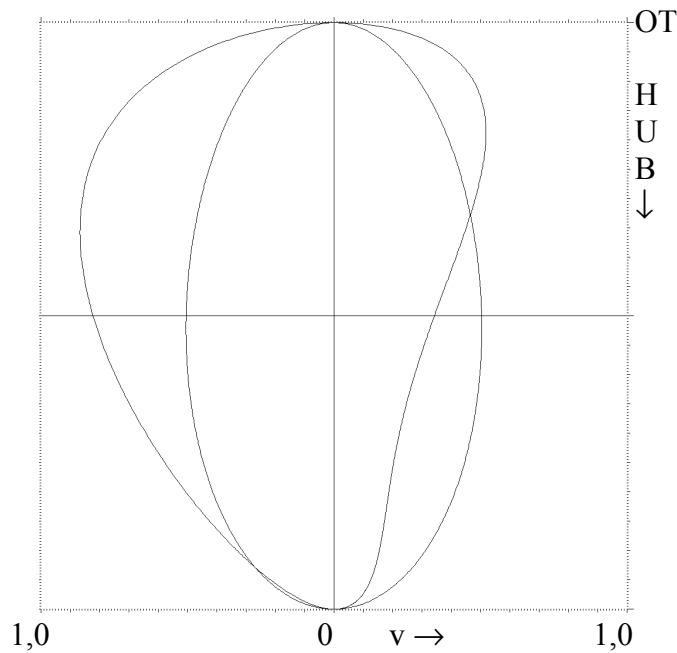


**Bild 2** Typischer Getriebezug für eine Presse



**Bild 3**

Wälz- und Kopfkurven der für eine Pressenoptimierung berechneten Unrundräder

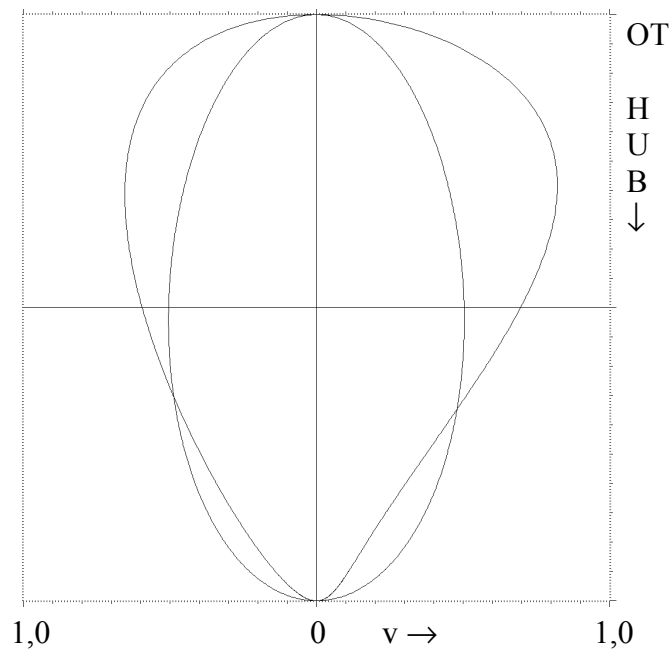


**Bild 4** Vergleich der Geschwindigkeitsverläufe über dem Hub mit konstant drehender Kurbelwelle und Kurbelwelle über Unrundgetriebe; Geschwindigkeit für Stößelbewegung von OT nach UT positiv

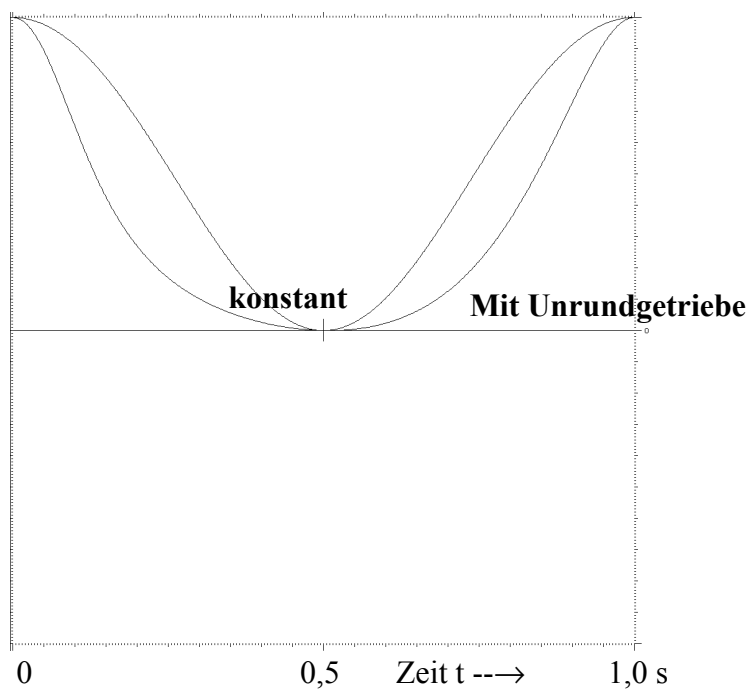
Horizontal wird die Hubgeschwindigkeit über dem Hub (vertikal, oben OT und unten UT) angezeigt, wobei hier ein Vergleich mit und ohne Unrundgetriebe dargestellt ist. Man sieht deutlich den langsameren und gleichmäßigeren Geschwindigkeitsverlauf gegenüber dem Verlauf ohne Unrundgetriebe. **Bild 5** zeigt eine Einstellung mit denselben Unrundrädern, die sich besonders für Umformungen mit anschließender Kalibrierung eignet. In **Bild 6** verdeutlicht der Weg-Zeit-Verlauf eindrucksvoll die langsame Bewegung im Bereich UT.

Für die Verzahnungsauslegung werden Berechnungen im Zeitbereich mit unterschiedlichen Lastfunktionen ausgeführt, mit denen die maximalen Zahnkräfte für die Tragfähigkeitsberechnung ermittelt werden.

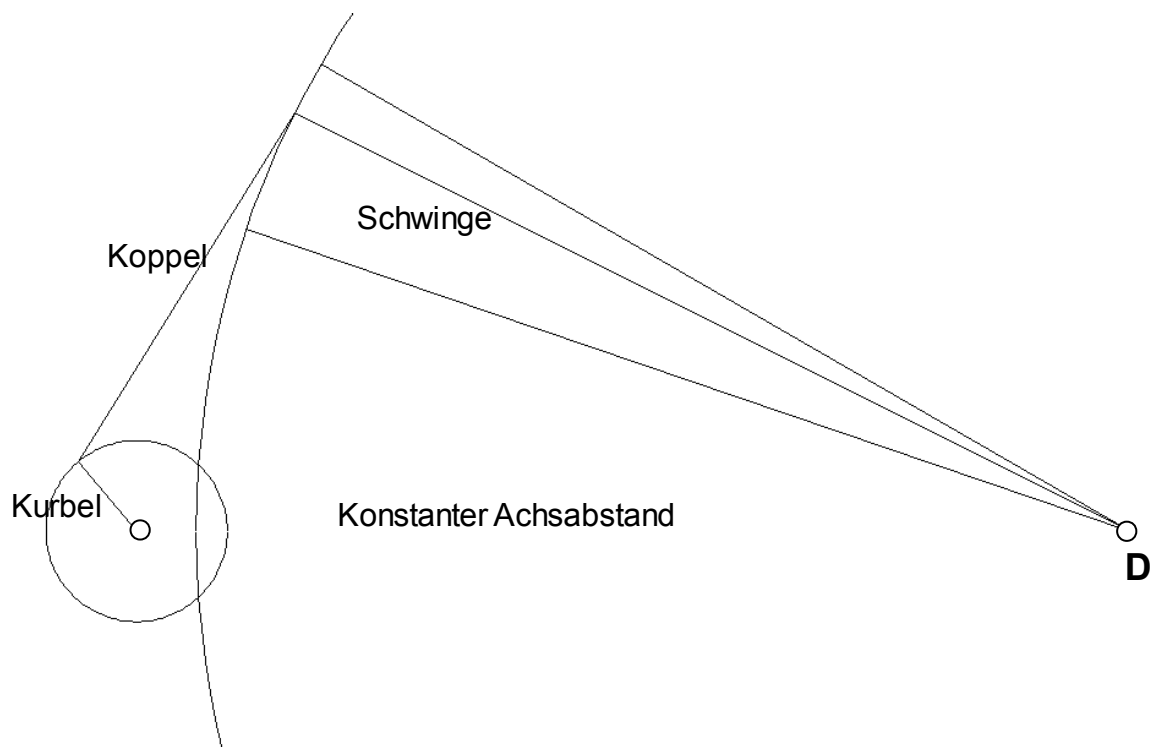
Bei dem hier vorgestellten Unrundgetriebe bringt die Verwendung deckungsgleicher Unrundräder enorme Vorteile, weil die Unrundräder wegen ihres Gewichtes von bis zu 1,5 t sehr schwer zu handhaben sind und die Losgrößen sehr niedrig sind.



**Bild 5:** Vergleich der Geschwindigkeitsverläufe über dem Hub mit konstant drehender Kurbelwelle und Kurbelwelle über Unrundgetriebe; Geschwindigkeit für Stößelbewegung von OT nach UT positiv **Hubwelle gegenüber Bild4 um 30° verdreht**



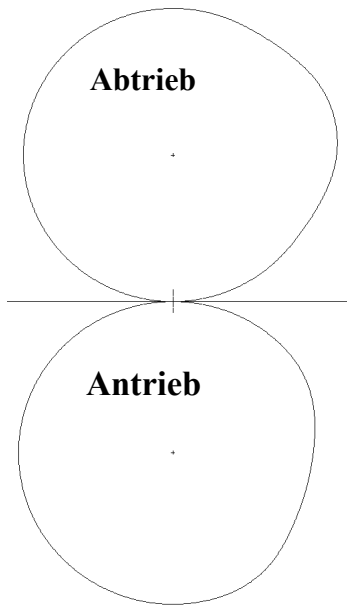
**Bild 6** Vergleich der Stößelwege über der Zeit mit konstant drehender Kurbelwelle und Kurbelwelle über Unrundgetriebe, zu Bild 5.



**Bild 7** Unrundgetriebe mit Kurbelschwinge als Folgegetriebe; das Abtriebsrad des Unrundgetriebes treibt die Kurbelwelle an.

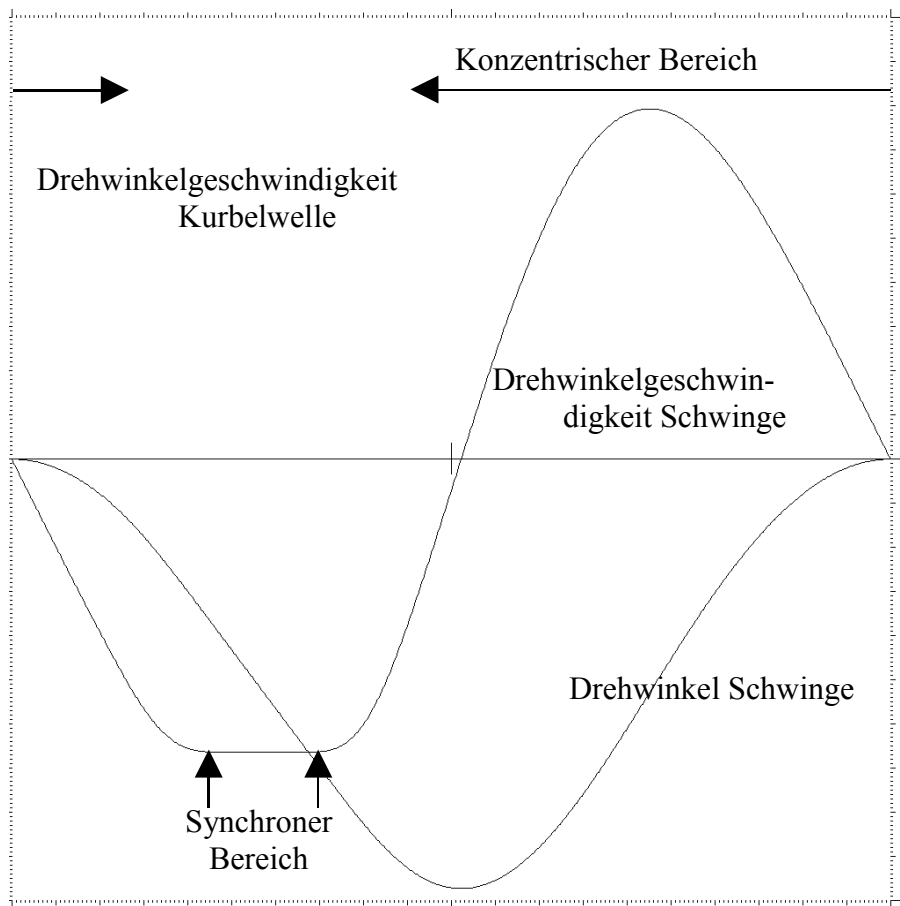
## 2. Kurbelschwinge als Folgegetriebe

Als Nächstes wird eine Anwendungsfall vorgestellt, der sich nicht mit deckungsgleichen Unrundrädern realisieren lässt. Wie in **Bild 7** dargestellt, folge einem Unrundgetriebe eine Kurbelschwinge nach. gleichzeitig drehe sich um den Drehpunkt **D** eine runde Scheibe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Die Schwinge soll sich in einem bestimmten Zeitintervall der Periode genau synchron zur runden Scheibe bewegen. Gleichzeitig wird als Randbedingungen gefordert, dass die Wälzkurven der unrunder Zahnräder in einem großen Winkelbereich konzentrisch sind, wobei die Winkelgeschwindigkeit des Antriebsrades konstant sei. Diese Aufgabenstellung kann mit einem Unrundräderpaar gemäß **Bild 8** realisiert werden. In **Bild 9** sind die Drehwinkelgeschwindigkeiten der Kurbelwelle und der Schwinge über der Zeit für eine Periode wiedergegeben. Man erkennt deutlich den konzentrischen Bereich der Unrundräder an der konstanten Drehwinkelgeschwindigkeit der Kurbelwelle und den synchronen Bereich an der konstanten Drehwinkelgeschwindigkeit der Schwinge. Die sehr hohe Genauigkeit konnte mit dem Fourierreihenansatz gemäß (1.4) mit nur 12 Reihengliedern erreicht werden, wobei



**Bild 8**

Kopf- und Wälzkurven für eine Aufgabenstellung (s. Text) mit Kurbelschwinge. Man beachte den großen konzentrischen Bereich der Kurven



**Bild 9**

Drehwinkelgeschwindigkeiten über eine Periode

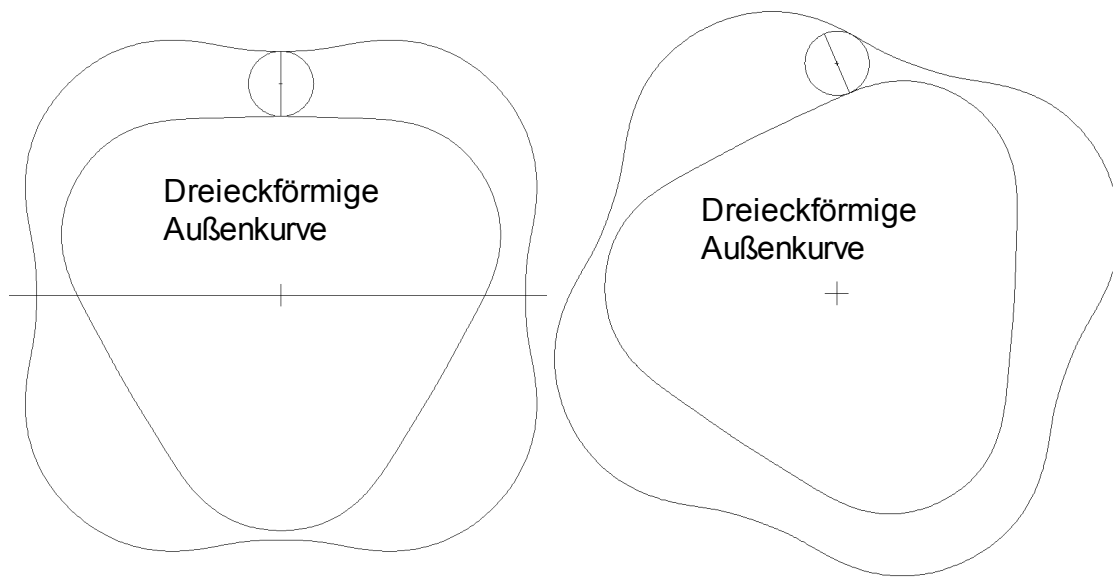
man bedenken muss, dass sich der synchrone Bereich nur über weniger als ein Drittel der Periode erstreckt. Hier kommt wieder die enorme Leistungsfähigkeit der Fourierreiheninterpolation mit wenigen Reihengliedern für periodische Vorgänge zum Ausdruck.

### 3. **Hydromotor**

Ein anders gelagertes Beispiel ist die Auslegung eines Hydromotors mit einer unrunder Verzahnungsgeometrie. Das abstrakte, allgemein anwendbare Konstruktionsprinzip ist das Folgende: Man hat eine beliebige Außenrollkurve, die sich um den Ursprung eines Koordinatensystems dreht, in **Bild 10** als Beispiel die dreieckförmige Rollkurve. Auf dieser Außenrollkurve lässt man ein rundes Rad so abrollen, dass der Drehpunkt des runden Rades immer auf der Y-Achse des Koordinatensystems zu liegen kommt. Nun wird als Gegenkurve eine Innenrollkurve berechnet, die sich auch um den Koordinatenursprung dreht und auf der gleichzeitig das runde Rad rollt. Natürlich hängt es vom Durchmesser des runden Rades ab, ob die Gegenkurve geschlossen ist oder nicht. Im vorliegenden Fall erhält man so die viereckförmige Gegenkurve. Man kann hier zeigen, dass man gleichzeitig 7 runde Räder mitlaufen lassen kann, so dass sich 7 Kammern ergeben, die groß und klein werden, während die runden Räder abrollen. So kann man diese Konstruktion als hydraulische Pumpe oder als hydraulischen Motor verwenden. **Bild 11** zeigt eine fertig verzahnte Ausführung. Als Außenrad kann man auch eine viereckförmige Form wählen und erhält dann als Innenrad eine fünfeckförmige Form und eine Konstruktion mit insgesamt 9 Kammern.

### 4. **Zahnstangengetriebe mit unrunder Zahnrädern**

Als letztes Beispiel soll auf Zahnstangengetriebe mit unrunder Zahnrädern eingegangen werden. Unter einer Zahnstange versteht man ein verzahntes Bauteil, das sich nur längs einer vorgegebenen Geraden bewegen kann, die hier mit der X-Achse eines Koordinatensystems zusammenfallen soll. Dann ist der Abstand des Drehpunktes des Unrundrades zur X- und Y-Achse konstant und der Berührungspunkt der Wälzkurve der Zahnstange mit der Wälzkurve des Unrundrades liegt auf der Senkrechten zur X-Achse durch den Drehpunkt. Man sieht leicht, dass für jede unrunde Wälzkurve auch eine passende Zahnstangenwälzkurve existiert und für Optimierungsaufgaben für Getriebezüge mit unrunder Zahnstangengetriebe gilt damit im Wesentlichen die in Abschnitt I skizzierte Optimierungsstrategie.



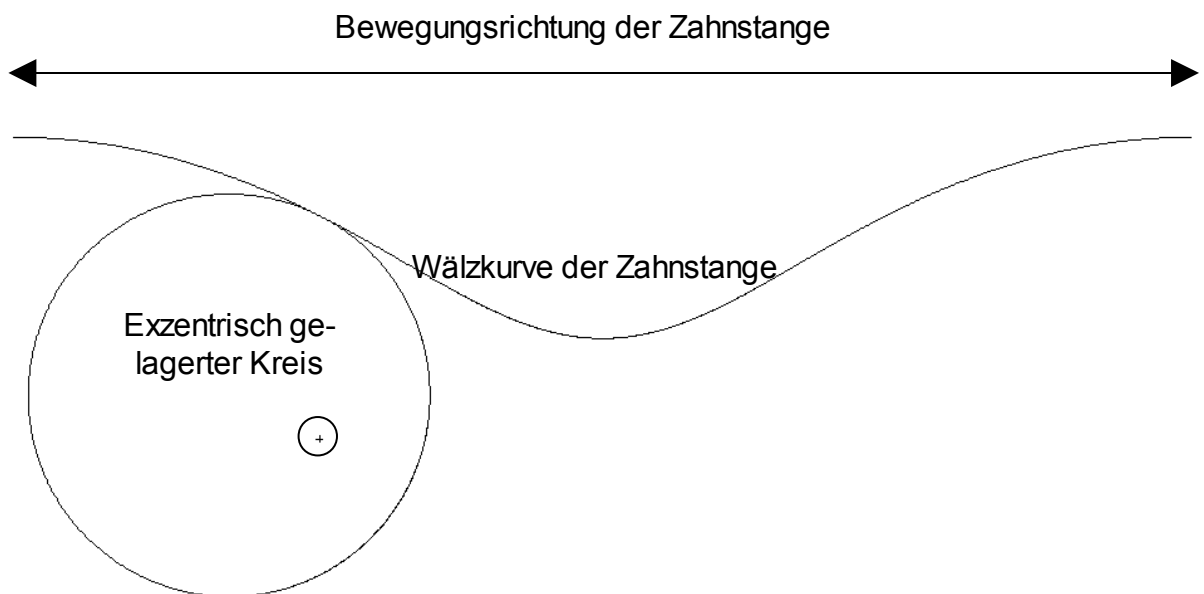
**Bild 10** Wälz- und Kopfkurven für den Hydromotor; zwei unterschiedliche Wälzpositionen



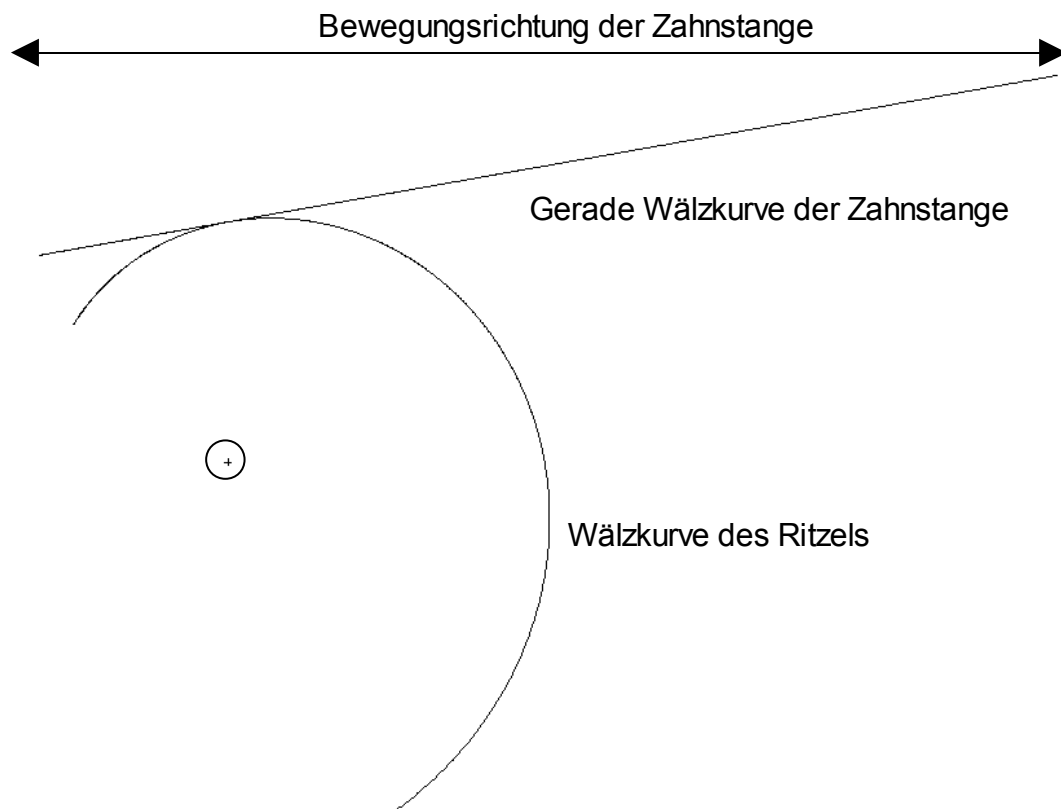
**Bild 11** Verzahnter Hydromotor



Zwei besonders einfache Zahnstangengetriebe seien hier als Beispiel vorgestellt, nämlich in **Bild 12** ein Zahnstangengetriebe mit einem exzentrisch gelagerten runden Zahnrad und in **Bild 13** ein Zahnstangengetriebe mit einer schräggestellten geraden Zahnstange.



**Bild12** Wälzkurven eines Zahnstangengetriebes mit exzentrisch gelagertem Kreis



**Bild 13** Wälzkurven eines Zahnstangengetriebes mit schräggestellter normaler Zahnstange

#### **IV Über die Verzahnung, Tragfähigkeitsberechnung, Herstellung und Qualitätssicherung unrunder Zahnräder und Zahnstangen**

Für die Verzahnung muss natürlich das Verzahnungsgrundgesetz erfüllt sein, d. h. die Verbindungslinie zwischen dem Wälzpunkt und dem momentanen Flankenberührungspunkt muss senkrecht zur Flankentangente sein. Es zeigt sich, dass durch eine gedacht und unendlich dünne Zahnstange, deren Wälzgerade im Wälzpunkt eines Wälzkurvenpaares tangential an den Wälzkurven anliegt, gerade eine in diesem Sinn verallgemeinerte Evolventenverzahnung generiert wird [2], [3], [7]. Für die Verzahnung ergibt sich dabei die Profilverschiebung aus dem Abstand zwischen der Wälzgeraden und der Profilmittellinie der Zahnstange. Speziell in [7] wird genau auf die Auslegung einer Evolventengeradverzahnung für unrunder Wälzkurven einschließlich der Verzahnung im Wälzstoßverfahren mit "normalen"

Schneidrädern eingegangen. Korrekturen der Zahnflanken können auch ausgeführt werden (z. B. Flankenkopfrücknahme oder leichte Balligkeit der Zahnflanken /8/).

Für ein Paar Unrundräder mit deckungsgleichen Wälzkurven ist es nun wünschenswert, auch die Verzahnung deckungsgleich zu erzeugen. Dazu ist natürlich eine Profilverschiebung 0 erforderlich. Hierauf wird ausführlich in /6/ eingegangen.

Die Tragfähigkeitsberechnung erfolgt im Wesentlichen nach DIN 3990, wobei allerdings die wirkende Kraft am Zahn abweichend von der DIN berechnet werden muss, wie dies ebenfalls in /6/ dargestellt wird.

Die Herstellung unrunder Zahnräder und Zahnstangen erfolgt mit Wälzstoßmaschinen und handelsüblichen Schneidrädern. Die Qualität der Verzahnung ergibt sich aus der Qualität der Schneidräder und dem Nachgiebigkeitsverhalten der Wälzstoßmaschine und ist damit praktisch nicht schlechter als bei runden Verzahnungen. Eine Qualitätsüberprüfung erfolgt mit einer Zweiflanken-Wälzprüfung und durch Messen der Flankenrichtung.

## LITERATURNACHWEIS

- /1/ Eberle, J. : Zur Theorie des Ovalradzählers  
VDI-Zeitschrift 108, Nr. 12, 1966
- /2/ Olsson, U. : Non-circular Clyndrical Gears. Acta  
Polytechnica, Mechanical Engineering Series  
135 (1953), Vo. 2, Nr. 10
- /3/ Hasse, T. : Verzahnung für Unrundräder hoher Qualität  
VDI-Z 132 (1990) 6, S. 55-59
- /4/ Großmann, CH. : Numerik der Optimierung  
Terno, J. Teubner Studienbücher, Stuttgart 1997
- /5/ Hasse, T. : Auslegung ungleichförmiger Bewegungsgetriebe mit  
unrunden Zahnrädern und steuerbarem Antrieb unter  
Berücksichtigung der Bilanz der kinetischen Energie.  
VDI Berichte 1423, 1998, S. 171-191
- /6/] Hasse, T. : Über den Entwurf von Unrundgetrieben mit  
deckungsgleichen unrunden Zahnrädern für  
typische Getriebeaufgaben der Technik  
erscheint in: VDI-EKV Konstruktion
- /7/ Hasse, T. : WAELZ - Das LORENZ-Entwicklungssystem  
▶ zur Herstellung und Berechnung beliebiger  
Rollkurven und deren Verzahnung sowie  
▶ zur Herstellung der Verzahnung beliebiger  
Rollkurven mit LORENZ-Wälzstoßmaschinen  
2. Auflage, Maschinenfabrik LORENZ GmbH,  
Ettlingen 1997
- /8/ LORENZ-  
Verzahnwerkzeuge : Ein Handbuch für Konstruktion und Betrieb  
3. Auflage, Ettlingen 1977