Grundlagen

Geometrie, Teil 1

Ebene Geometrie speziell auch im Hinblick auf die lineare Algebra

Stand: Oktober 2019 >>>>>>>>>>>>>>>>

Ingenieurbüro Dr. Tilman Hasse

Eibenweg 5 • 76337 Waldbronn • Telefon: 07243 / 572113 • FAX: 07243 / 572114

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Vorangestellt seien zwei Zitate:

- Alles sollte so einfach wie möglich sein – aber nicht einfacher. (Albert Einstein)
- So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen. (Immanuel Kant)

Die Grundsätze der Geometrie zu erforschen läuft auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung hinaus. Diese Aufgabe wurde erstmals von Euklid ca. 300 v. Chr. systematisch untersucht und dargestellt.

Hier gehen wir zunächst von einer anschaulich begreifbaren Ebene aus und untersuchen die sogenannte „Ebene Geometrie“ mit Punkten, Geraden, Vielecken und Kreisen. Dazu wird die Beschreibung der ebenen Geometrie durch die lineare Algebra mittels Koordinatensystem ausführlich dargestellt. Damit können relativ einfach beliebige Kurven in der Ebene beschrieben werden und alle Probleme können mit einem Computer berechnet und analysiert werden.

Es folgt die Erweiterung auf den Raum im zweiten Teil, bei dem nun Punkte, Geraden und Ebenen eine wesentliche Rolle einnehmen. Hier spielt die lineare Algebra bereits eine überaus wichtige Rolle. Als Beispiel wird insbesondere auch auf die sogenannte Himmelskugel eingegangen.

2 Geometrie der euklidischen Ebene

Wenn wir von „**Konstruktionen**“ sprechen, dann meinen wir stets „Konstruktionen mit Zirkel und Lineal“. Dabei versteht man unter einem Lineal ein Gerät ohne Skaleneinteilung, nur zum Zeichnen gerader Linien. Bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal dürfen nur die folgenden Schritte durchgeführt werden:

(1) Beliebigen Punkt zeichnen.

(2) Beliebigen Punkt auf einer Geraden, Strecke oder Kreislinie zeichnen.

(3) Gerade durch zwei Punkte zeichnen (Lineal).

(4) Zwei Punkte durch eine Strecke verbinden(Lineal).

(5) Schnittpunkte von Geraden, Strecken und Kreislinien zeichnen.

(6) Kreis um einen gegebenen Mittelpunkt M durch einen weiteren Punkt P zeichnen (Zirkel).

(7) Kreis um einen gegebenen Mittelpunkt M mit einem Radius zeichnen, der von zwei (schon konstruierten oder gegebenen) Punkten übernommen werden kann (Zirkel). “Radius aus der Zeichnung in den Zirkel übernehmen und damit einen Kreis zeichnen“.

2.1 Grundlegende Begriffe

Wir betrachten hier eine **Ebene E der Anschauung**, die aus Punkten besteht. Dabei ist ein **Punkt** der Ebene ein grundlegendes Element der Geometrie. Anschaulich stellt man sich darunter ein Objekt ohne jede Ausdehnung vor. Wir bezeichnen hier Punkte mit großen Buchstaben mit Unterstrich (oft auch ohne Unterstrich), also $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{Q}$ usw..

Definition (2.1.1) Abstand von Punkten

Der **Abstand** oder die **Distanz** zweier Punkte $\underline{A}$, $\underline{B}$ ist die **Länge** der kürzesten Verbindung dieser Punkte, anschaulich mit dem Zirkel abgemessen. Die geometrische Größe „**Länge**“ wird in der **Maßeinheit** (auch Größeneinheit) **Meter** (m) angegeben, die einen eindeutigen Wert hat. Alle anderen Werte der Größe werden als Vielfaches der Einheit angegeben, also z.B. 1mm = (1/1000) m oder 1km = 1000 m. In der Praxis muss die Maßeinheit immer angegeben werden. Wir schreiben:

- Abstand zwischen den Punkten $\underline{A}$ und $\underline{B}$: $\boldsymbol{|\underline{A}\ \underline{B}|}$, z.B. $|A\ B| = 7$ cm

Es müssen die **Grundgesetze der Metrik** erfüllt sein, d.h., es gilt für beliebige Punkte $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C} \in E$:

(1) $|\underline{A}\ \underline{B}| \geq 0$ und $|\underline{AB}| = 0$ genau dann, falls $\underline{A} = \underline{B}$ (Positive Definitheit)

(2) $|\underline{A}\ \underline{B}| = |\underline{B}\ \underline{A}|$ (Symmetrie)

(3) $|\underline{A}\ \underline{B}| \leq |\underline{A}\ \underline{C}| + |\underline{C}\ \underline{B}|$ (Dreiecksungleichung)

(3) wird anschaulich mit Zirkel und Lineal gezeigt

Definition (2.1.2) Ein Punkt Q zwischen den Punkten A, B

Es seien Punkte A, B mit A ≠ B gegeben und ein Punkt Q mit Q ≠ B und A ≠ Q. Der Punkt **Q liegt zwischen A und B** genau dann, wenn |A B| = |A Q| + |Q B| gilt.

Definition (2.1.3) Strecke

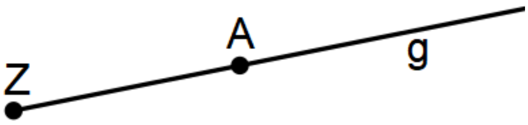
(1) Die Menge der zwischen A und B liegenden Punkte einschließlich der Punkte A und B wird mit [AB] bezeichnet und heißt: **Strecke mit den Endpunkten A und B.** Man hat also:

(2) [AB] = { Q ∈ E | Q ist Zwischenpunkt von A, B }

(3) Für A =B ist [AB]={A}

Bemerkung (2.1.4): Oft wird eine Strecke auch mit kleinen Buchstaben bezeichnet, z.B. meist bei Dreiecken. So ist es üblich, bei einem Dreieck mit den Ecken A, B, C zu setzen: c = [AB] und |c| = |AB| und man spricht von der Seite c des Dreiecks.

Bild 2.1.1: Halbgerade [ZA



Eine Verlängerung einer Strecke [ZA] „in Richtung A“ ergibt eine sog. **Halbgerade**, und eine Verlängerung einer Strecke [ZA] „in beide Richtungen“ wird als **Gerade** bezeichnet, genauer:

Definition (2.1.5) Gerade, Halbgerade

Gegeben seien zwei Punkte Z, A ∈ E, A ≠ Z und die Strecke [ZA]

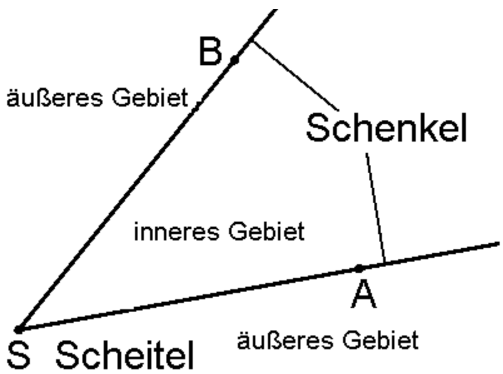
(1) [ZA = [ZA] ∪ { Q ∈ E | A ist Zwischenpunkt von Z, Q } heißt Halbgerade oder Strahl mit dem **Anfangspunkt** Z

(2) g(Z, A) = [ZA] ∪ { Q ∈ E | (A ist Zwischenpunkt von Z, Q) oder (Z ist Zwischenpunkt von A, Q) } heißt Gerade durch die Punkte Z, A

Geraden werden hier mit kleinen Buchstaben, meist g oder h, bezeichnet.

Mit Hilfe der Halbgeraden wird ein Winkel definiert:

Definition (2.1.6) Winkel: Zwei Halbgeraden [SA und [SB mit gemeinsamem Anfangspunkt S bilden einen **Winkel** mit dem **Scheitelpunkt** S und den beiden **Schenkeln** [SA und [SB. Der Winkel legt zwei Gebiete fest, ein inneres und ein äußeres, wenn die Halbgeraden nicht auf einer Geraden liegen.



Eine allgemeine Bemerkung: Wir betrachten hier einen Zustand quasi zu einem bestimmten Zeitpunkt. Also ein Dreieck liegt im Prinzip unveränderlich in der Ebene fest, vielleicht noch unbekannt, da es erst konstruiert werden muss. Insbesondere gilt das für einen bezeichneten Punkt, der quasi in der Ebene verankert ist. Betrachtet man dagegen die Spitze eines Bleistifts als Punkt, so ist dieser Punkt auf der Ebene beweglich und man kann seine Position verfolgen, es handelt sich also um eine Bewegung. Zu beachten ist ferner die Orientierung, schon bei der Dreieckskonstruktion!

2.2 Rechter Winkel, senkrecht, einfache Flächen, Satz des Pythagoras

Definition (2.2.1) Zwei zueinander senkrechte Geraden

Seien h und g zwei Geraden, die genau einen Schnittpunkt S gemeinsam haben und sei auf g ein Punkt A ungleich S gegeben, dazu der Punkt A‘ ungleich A mit |AS| = |SA‘| . Gilt dann für jeden Punkt Q der Geraden h: |AQ| = |A‘Q|, so ist ist h senkrecht auf g. Dabei entstehen mit den entsprechenden Halbgeraden vier Winkel, die man alle als rechte Winkel bezeichnet. Man sagt auch: Die Geraden g und h sind zueinander orthogonal.

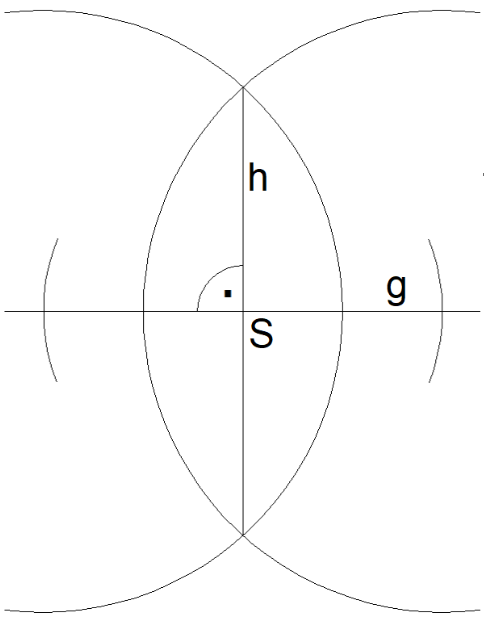


Bild 2.2.1 Konstruktion eines **rechten Winkels** mit Zirkel und Lineal. Dabei wird hier von einem Punkt S ausgegangen, der auf einer Geraden g liegt und man konstruiert die senkrechte Gerade h durch den Punkt S.

Der rechte Winkel ist für Wissenschaft und Technik immens wichtig. Als Beispiel sei hier die Roll – und Gleitbewegung angeführt:

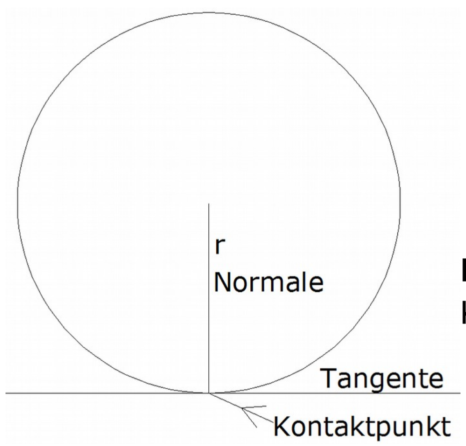


Bild 2.2.2 Normale, Tangente, Kontaktpunkt und Krümmungsradius r

Auf einem Kontaktpunk (auch Berührungspunkt) berühren sich zwei Kurven, in Bild 3.2 handelt es sich um eine Gerade und einen Kreis. Die Gerade ist hier gleichzeitig Tangente an den Kreis im Kontaktpunk und auch Tangente zu sich selbst im Kontaktpunk. Die Tangente ist eine Gerade. Eng verwandt mit der Tangente ist der Tangentenvektor, den wir aber erst später einführen. Senkrecht zur Tangente im Kontaktpunk ist die Normale, ebenfalls eine Gerade, die im vorliegenden Fall durch den Kontaktpunk und den Kreismittelpunkt verläuft. Außerdem muss im Kontaktpunk die Krümmung κ berechenbar sein. Für eine Gerade ist $\kappa = 0$ und für einen Kreis mit Radius r gilt: $\kappa = 1 / r$. Man kann für jede hinreichend glatte Kurve für einen beliebigen (Kontakt –) Punk die Tangente, die Normale und die Krümmung berechnen. Uns interessieren nun folgende drei Bewegungsarten in einem Kontaktpunk:

- **Rollen**
- **Gleiten**
- Roll – Gleiten = **Wälzen**

Damit eine Roll – oder Gleit – oder Wälzbewegung in einem Kontaktpunk stattfinden kann, müssen die Tangenten, und damit auch die Normalen, der beiden Kurven übereinstimmen. Für eine Rollbewegung muss zusätzlich die kinematischen Rollbedingung erfüllt sein, in unserem Fall: $|\Delta\varphi \cdot r| = |\Delta s|$.

Als erste Anwendung beschäftigen wir uns zunächst mit dem **Rechteck** und dem **rechtwinkligen Dreieck:**

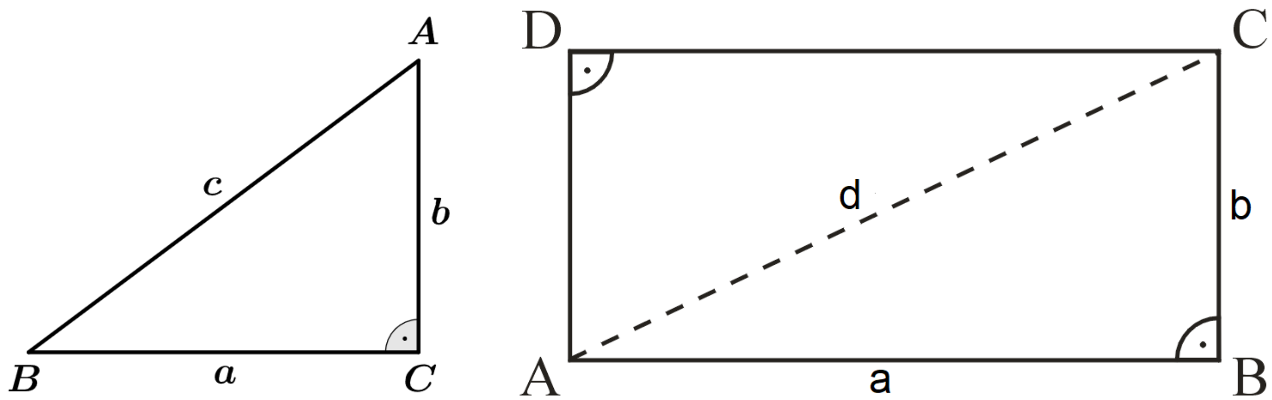


Bild 2.2.3 Rechtwinkliges Dreieck und Rechteck

Man sieht leicht, dass sowohl das rechtwinklige Dreieck als auch das Rechteck durch Vorgabe der Seitenlängen |a| und |b| mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, wobei die Seiten a und b jeweils einen rechten Winkel einschließen.

Definition (2.2.2) Wir betrachten nun den **Flächeninhalt (area)** $A(R_{ab})$ eines Rechtecks R_{ab} mit den Seiten a und b, also ein Maß für den Teil der Ebene, der von den Seiten des Rechtecks umfasst wird. Anschaulich kann man durch Auslegen der Fläche mit zueinander deckungsgleichen Quadraten mit Bestimmung der Anzahl der Quadrate den Flächeninhalt bestimmen. Dies führt zu der Formel:

➢ $A(R_{ab}) = |a|\cdot|b|$ (2.2.2)(a)

Entsprechend erhalten wir gemäß Bild 2.2.3 für das rechtwinklige Dreieck D_{ab} mit den Seiten a,b, die den rechten Winkel einschließen:

- $A(D_{ab}) = 0{,}5\cdot|a|\cdot|b|$ (2.2.2)(b)

Wir kommen nun zum sogenannten Satz des Pythagoras, einer der fundamentalen Sätze der euklidischen Geometrie. Er bezieht sich auf rechtwinklige Dreiecke in einer Ebene:

Satz (2.2.3) Satz des Pythagoras

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck D_{ab} mit den Seiten a,b, die den rechten Winkel einschließen, und der Seite c, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, siehe Bild 2.2.3. Dann gilt:

- $|c|^2 = |a|^2 + |b|^2$

Einer der vielen Beweise des Satzes vom Pythagoras: Gemäß Bild 2.2.4 hat man für die Gesamtfläche $\mathbf{A = (|a|+|b|)^2 = |a|^2 + 2\cdot|a|\cdot|b| + |b|^2 = |c|^2 + 2\cdot|a|\cdot|b|}$, **also** $\mathbf{|a|^2 + |b|^2 = |c|^2}$

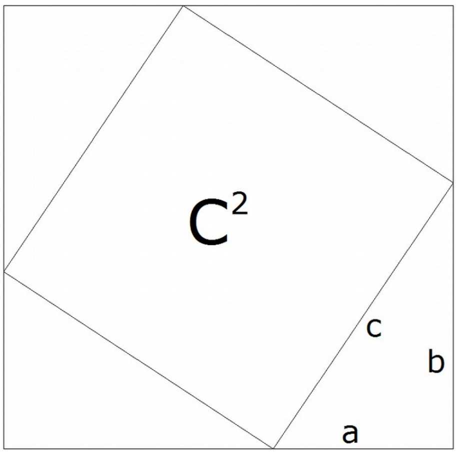


Bild 2.2.4 Zum Satz des Pythagoras

Definition (2.2.4): Parallele Geraden

Zwei Geraden g und h heißen parallel , wenn sie beide auf einer dritten Geraden f senkrecht stehen. Wir schreiben dafür g || h . Es gilt:

- g || h und g ≠ h genau dann, falls g und h keinen gemeinsamen Punkt haben.
- g || h genau dann, falls g und h überall den gleichen Abstand haben.
- Sei g eine Gerade und Q ein Punkt, der nicht auf der Geraden liegt; dann gibt es genau eine Gerade h, die Q enthält und für die g || h

Eine Anwendung: Gegeben sei ein beliebiges Dreieck gemäß Bild 2.2.5

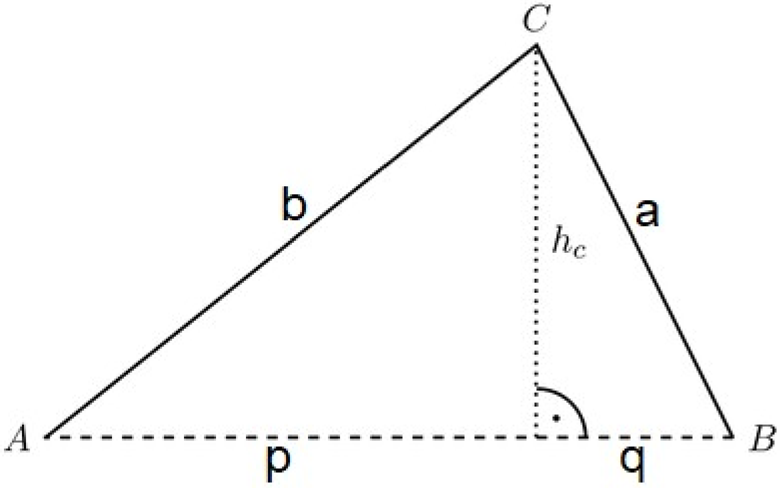


Bild 2.2.5: Zu bestimmen sei die Höhe h_c

Satz (2.2.5): Vorgegeben seien die Seiten c = p+q > 0, a > 0 und b > 0. Damit ist das Dreieck eindeutig bestimmt und wir haben:

- $p+q = c \;\rightarrow\; q = c - p \;\rightarrow\; q^2 = c^2 - 2\cdot c\cdot p + p^2$
- $h_c^2 = b^2 - p^2$
- $h_c^2 = a^2 - q^2 = a^2 - c^2 + 2\cdot c\cdot p - p^2$ Damit folgt:
- $0 = b^2 - p^2 - a^2 + c^2 - 2\cdot c\cdot p + p^2$ Nach p aufgelöst ergibt sich:
- $p = (b^2 - a^2 + c^2) / (2\cdot c)$
- Man beachte: q kann auch negativ sein!
- $h_c^2 = b^2 - p^2 = b^2 - (b^2 - a^2 + c^2)^2 / (2\cdot c)^2 = (2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) / (2c)^2$
- Also Fläche $A = \sqrt{(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)} / 4$
- $\rightarrow$ (für später): $h_c^2 = 4\cdot A^2 / c^2$ bzw. $h_c = 2\cdot A / c$

Umkreis eines Dreiecks:

Es ergibt sich:

- M ist Schnittpunkt der Mittelsenkrechten durch S_a und S_b
- Setze $r^2 := |MC|^2 = |MS_a|^2 + (a/2)^2 = |MB|^2$, genauso gilt:
- $r^2 = |MC|^2 = |MS_b|^2 + (b/2)^2 = |MA|^2$, also: $r = |MA| = |MC| = |MB|$
- Nun haben wir gemäß Satz (2.6.3): $r = a / (2\cdot\sin(\alpha))$ bzw. $\sin(\alpha) = a / (2\cdot r)$ und
- $h_c = b\cdot\sin(\alpha) = b\cdot a / (2\cdot r)$ bzw. $r = b\cdot a / (2\cdot h_c) = b\cdot a\cdot c / (4\cdot A)$ unter Verwendung von Satz (2.2.5), siehe oben.

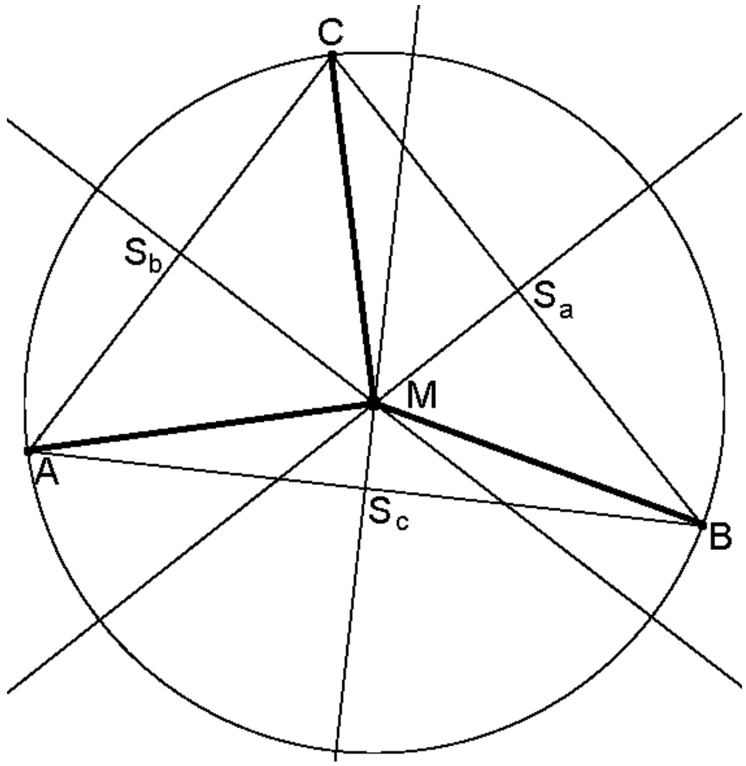


Bild 2.2.6: Umkreis eines beliebigen Dreiecks

2.3 Zentrische Streckungen

Definition (2.3.1) Zentrische Streckung

Es sei Z ein Punkt der Ebene E; $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Eine Abbildung $f : E \to E$ heißt zentrische Streckung mit (Streck-)Zentrum Z und Streckfaktor r falls für jeden Punkt P ungleich Z gilt, wobei Q = f(P) der Bildpunkt sei und wir die durch die Punkte Z und P definierte Gerade g sei:

- Für $r > 0$ gilt: $|ZQ| = r \cdot |ZP|$, wodurch Q eindeutig definiert ist, wenn man verlangt, dass Q zwischen Z und P liegt oder P zwischen Z und Q.
- Für $r < 0$ betrachten wir den Punkt P‘ auf g für den $|ZP| = |ZP'|$ gilt und es sei $|ZQ| = |r| \cdot |ZP|$, wodurch Q eindeutig definiert ist, wenn man verlangt, dass Q zwischen Z und P‘ liegt oder P‘ zwischen Z und Q.

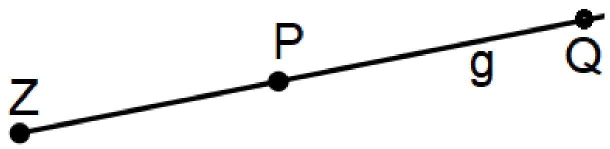


Bild (2.3.1) Zur zentrischen Streckung um r>0 hier: $|ZQ| = r \cdot |ZP|$

Satz (2.3.2) Eigenschaften einer zentrischen Streckung gemäß (2.3.1)

- Umkehrabbildung ist die zentrische Streckung mit demselben Zentrum Z und dem Streckfaktor 1/r
- Fixpunkt: Z
- Fixgeraden: alle Geraden durch Z
- Geradentreu
- Bildgerade || Originalgerade

Satz (2.3.3) Zentraler Satz zur zentrischen Streckung
Bei einer zentrischen Streckung mit Faktor r gilt für jede Strecke AB:
|A'B'|= |r| · |AB|, hier mit A' = f(A) und B' = f(B) gemäß (2.3.1)

Zum Beweis ein Bild, wobei A,B hier nicht auf einer Geraden g durch Z liegen.
Hier sei r= 4 / 7:

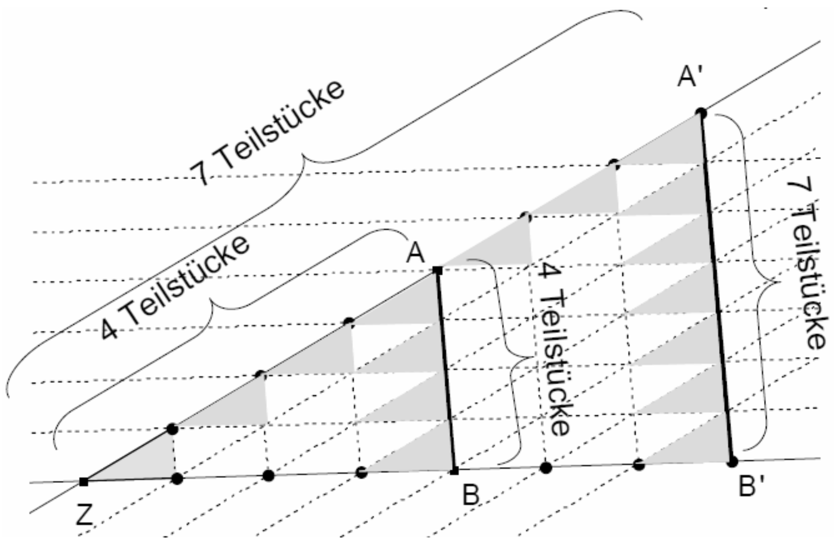


Bild 2.3.2: Skizze zum Beweis

Mit dem Satz (2.3.3) folgen sofort die Strahlensätze. Seien nämlich 4 paarweise verschiedene Punkt A, A', B, B' gegeben und bezeichnen wir Geraden wie folgt:

- g gegeben durch A und A'
- h gegeben durch B und B'
- j gegeben durch A und B
- k gegeben durch A' und B'

Die Geraden g und h mögen sich im Punkt Z schneiden. Dann gelten die beiden folgenden Strahlensätze:

Satz (2.3.4) 1.Strahlensatz
Ist j || k, so ist |ZA'| / |ZA| = |ZB'| / |ZB| = r und |ZA| / |AA'| = |ZB| / |BB'|; dabei ist r der Streckfaktor der zentrischen Streckung mit Zentrum Z.
Umkehrung des 1. Strahlensatzes:
Ist |ZA'| / |ZA| = |ZB'| / |ZB| = r oder |ZA| / |AA'| = |ZB| / |BB'|, so ist j || k .

Satz (2.3.5) 2.Strahlensatz
Ist j || k, so ist |ZA‘| / |ZA| = |A‘B‘| / |AB| = r

Anwendung: Zunächst Seitenhalbierende, siehe Bild 2.3.3.
Wir haben die beiden Seiten AB und AD, dazu die Seitenhalbierende EH. Dann gilt:

- EH || DB

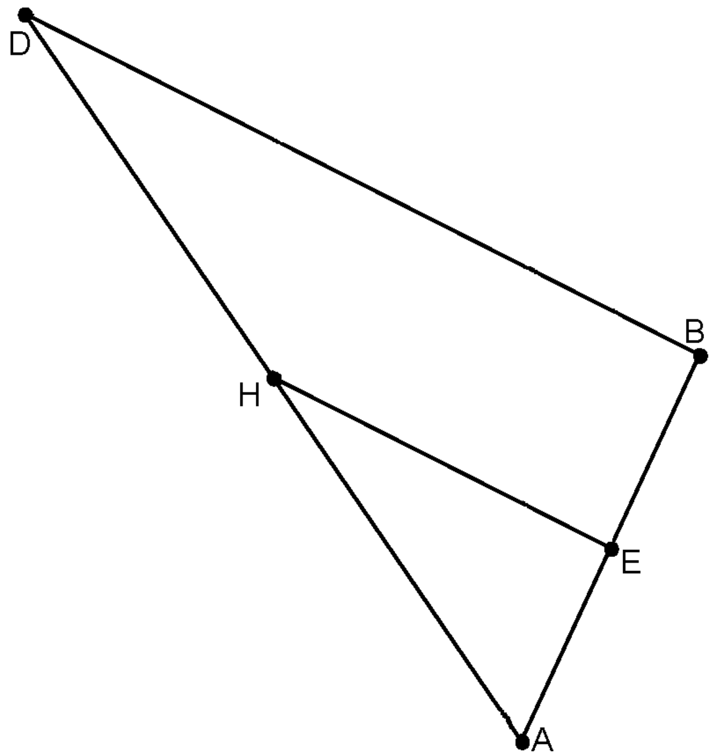


Bild 2.3.3: Zum Thema Seitenhalbierende

Das sieht man leicht ein, wenn man eine zentrische Streckung mit Zentrum in A betrachtet. Es wird EH mit dem Streckfaktor 2 auf DB gestreckt. Damit ist die Behauptung gemäß Satz(2.3.2) schon bewiesen.
Damit ergibt sich: In einem Viereck A,B,C,D bilden die vier Seitenhalbierenden EH || FG und GH || FE ein Parallelogramm, denn EH || DB und DB || FG, also EH || FG. Genauso folgt GH || FE.

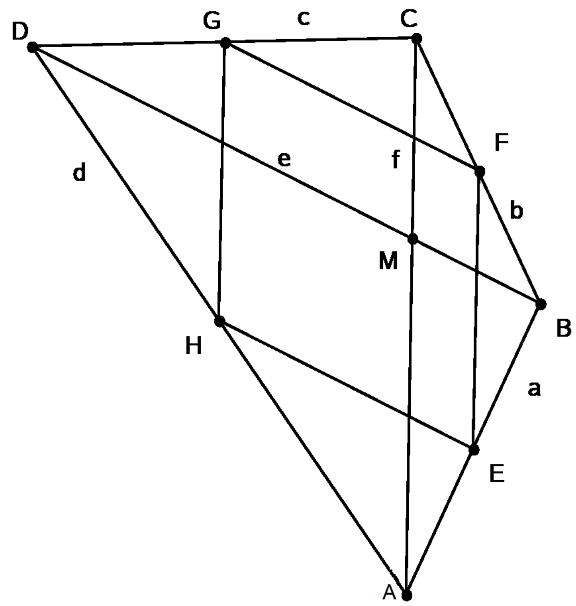


Bild 2.3.4: Ein Viereck mit seinen Seitenhalbierenden

Satz von Varignon (Pierre Varignon (1654-1722)):

Verbindet man die Mittelpunkte der Seiten eines Vierecks der Reihe nach miteinander, so entsteht ein Parallelogramm. Sein Flächeninhalt ist halb so groß wie der des Vierecks.
Für die Fläche hat man:

$$\begin{aligned} A(EFGH) &= A(ABCD) - A(HAE) - A(EBF) - A(FCG) - A(GDH) \\ &= A(ABCD) - \tfrac{1}{4}A(DAB) - \tfrac{1}{4}A(ABC) - \tfrac{1}{4}A(BCD) - \tfrac{1}{4}A(CDA) \\ &= \tfrac{1}{2}A(ABCD) \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

2.4 *Kartesischen Koordinatensystem,* $\mathbb{R}^2$

In der Ebene haben wir es grundsätzlich mit 4 verschiedenen Objekten zu tun: mit Punkten, mit Verschiebungen, mit Drehungen und mit Spiegelungen. Die geometrisch anschauliche Darstellung erfolgt in einem kartesischen Koordinatensystem: zwei Zahlengeraden, die senkrecht aufeinander stehen. Dabei ist üblicherweise die Anordnung der Achsen gemäß nebenstehender Abbildung, also die x – Achse bzw. „Index 1 – Achse" und senkrecht dazu die y – Achse bzw. „Index 2 – Achse" Die positive Drehung wird gemäß der rechten – Handregel definiert, wobei der Daumen senkrecht nach oben bezogen auf das Koordinatensystem zeigt. Soweit die Anschauung. **Abstrakt** erfolgen die Berechnungen im „$\mathbb{R}^2$ – Vektorraum", kurz $\mathbb{R}^2$.

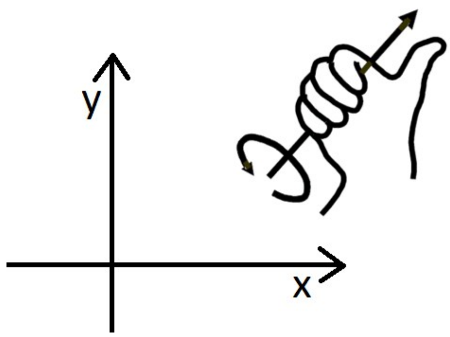


Bild 2.4.1 Koordinatenachsen

Definitionen (2.4.1)

(1) $\mathbb{R}^2 = \{ \underline{v} = (v_x, v_y)^t = (v_1, v_2)^t \mid v_1, v_2 \in \mathbb{R} \}$, wobei das hochgestellte t anzeigt, dass üblicherweise die Vektoren als Spalte geschrieben werden und als Indices werden x oder 1 und y oder 2 verwendet. Die Zahlen v_x und v_y werden als Koordinaten des Vektors $\underline{v}$ bezeichnet.

(2) Es ist komponentenweise Addition definiert: $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \underline{v} + \underline{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)^t$

(3) Es ist die skalare Multiplikation definiert: $\underline{v} \in \mathbb{R}^2, a \in \mathbb{R} \rightarrow a \cdot \underline{v} = (a \cdot v_1, a \cdot v_2)^t$

(4) Für zwei Vektoren $\underline{v}$, $\underline{w}$ wird das **Skalarprodukt** $\underline{v} \cdot \underline{w}$ definiert durch $\underline{v} \cdot \underline{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$ und der **Betrag** ergibt sich zu $\|\underline{v}\| = \sqrt{(\underline{v} \cdot \underline{v})}$.

(5) Zwei Vektoren $\underline{v}$, $\underline{w}$ heißen zueinander orthogonal genau dann, falls $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$ gilt.

(6) Zu einem Vektor $\underline{v} = (v_1, v_2)^t$ ist der dazu senkrechter Vektor $\underline{v}^\perp$ definiert durch: $\underline{v}^\perp := (-v_2, v_1)^t$

(7) Für $\underline{v}, \underline{u} \in \mathbb{R}^2$ wird definiert: $[\underline{v}, \underline{u}] := \underline{v}^\perp \cdot \underline{u} = - v_2 \cdot u_1 + v_1 \cdot u_2$

(8) $\underline{e}_1 = (1, 0)^t$ und $\underline{e}_2 = (0, 1)^t$ sind die sog. kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^2$

(9) $O = \underline{0} = (0, 0)^t$ heißt: Ursprung des Koordinatensystems.

Es gelten natürlich die üblichen Rechenregeln! Damit ist der $\mathbb{R}^2$ **– Vektorraum**, kurz $\mathbb{R}^2$, definiert – ganz abstrakt! Und zunächst geht es auch ganz abstrakt weiter:

Satz (2.4.2)

Für $\underline{v}, \underline{u} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

(1) $[\underline{v}, \underline{u}] = -[\underline{u}, \underline{v}]$

(2) $(\underline{v} \cdot \underline{u})^2 + [\underline{v}, \underline{u}]^2 = \|\underline{v}\|^2 \cdot \|\underline{u}\|^2$

(3) $|\underline{v} \cdot \underline{u}| \leq \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{u}\|$ Ungleichung von Cauchy – Schwarz

(4) $\|\underline{v} + \underline{u}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{u}\|$ Dreiecksungleichung

Beweis:

(1): durch Ausrechnen

(2): $(v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2)^2 + (-v_2 \cdot u_1 + v_1 \cdot u_2)^2 = (v_1 \cdot u_1)^2 + (v_2 \cdot u_2)^2 + (v_2 \cdot u_1)^2 + (v_1 \cdot u_2)^2 = (v_1^2 + v_2^2) \cdot (u_1^2 + u_2^2)$

(3): Folgt aus (2), weil $(\underline{v} \cdot \underline{u})^2 \leq (\underline{v} \cdot \underline{u})^2 + [\underline{v}, \underline{u}]^2 = \|\underline{v}\|^2 \cdot \|\underline{u}\|^2$

(4): Mit(3) folgt: $\|\underline{v} + \underline{u}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2 \cdot (\underline{v} \cdot \underline{u}) + \|\underline{u}\|^2 \leq \|\underline{v}\|^2 + 2 \cdot \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{u}\| + \|\underline{u}\|^2 = (\|\underline{v}\| + \|\underline{u}\|)^2$

Satz (2.4.3)

Für $\underline{v}, \underline{u}, \underline{w} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

- $[\underline{v}, \underline{u}] \cdot \underline{w} + [\underline{u}, \underline{w}] \cdot \underline{v} + [\underline{w}, \underline{v}] \cdot \underline{u} = \underline{0}$

Beweis: Man bilde das Skalarprodukt mit $\underline{w}^\perp$, $\underline{v}^\perp$ und $\underline{u}^\perp$ und erhält immer 0. Angenommen, das Ergebnis wäre $\neq \underline{0}$, führt daher zum Widerspruch.

Wir wollen nun den $\mathbb{R}^2$ – Vektorraum als **mathematisches Modell** für die Geometrie der Ebene verwenden. Dazu müssen wir uns im Klaren werden, wie die Objekte der Ebene (Punkte, Geraden oder Verschiebungen) zugeordnet werden. Hierzu identifizieren wir den **Ursprung mit einem Punkt der Anschauungsebene und legen die zueinander senkrechten Koordinatenachsen gemäß Bild (2.4.1) fest**, also zwei zueinander senkrechte Geraden in der Ebene. Sodann ordnen wir die Elemente des $\mathbb{R}^2$ den möglichen **Verschiebungen (Translationen)** zu. Ein Punkt $\underline{P} \in \mathbb{R}^2$ kann dann als Verschiebung des Ursprungs interpretiert werden; in diesem Sinn bezeichnet man $\underline{P}$ auch als **Ortsvektor**. Ein Punkt $\underline{P}$ hat anschaulich gewissermaßen zwei Funktionen: Einerseits kann er eine Positionsangabe sein, die man nicht verschieben kann, andererseits als Punkt, der gerade die Position hat und den man verschieben kann. In diesem Sinn kann man einen Punkt $\underline{P}$ mit Hilfe einer Verschiebung (Translation) $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ auf einen anderen Punkt $\underline{Q} = \underline{P} + \underline{v}$ verschieben, natürlich $\underline{Q}, \underline{P}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$.

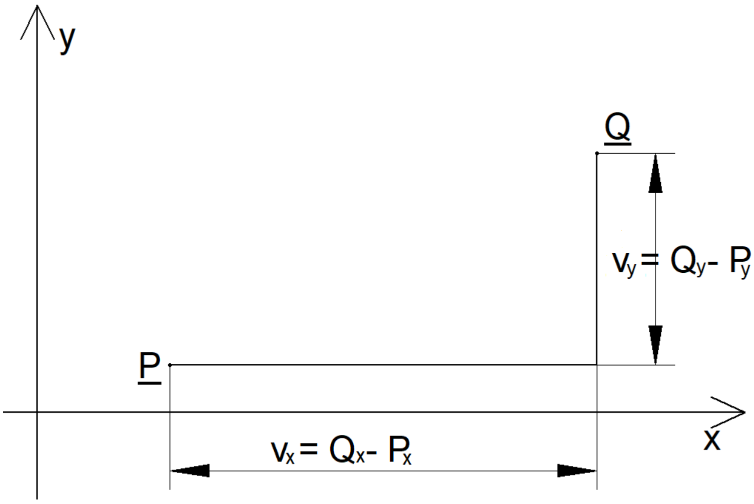


Bild 2.4.2 Zur Definition des Abstands zweier Punkte

Definition (2.4.4) Abstand zweier Punkte

Der Abstand zweier Punkte $\underline{P}, \underline{Q} \in \mathbb{R}^2$ ergibt sich, indem man den Vektor $\underline{v} = \underline{Q} - \underline{P}$, $v_x = Q_x - P_x$, $v_y = Q_y - P_y$ bildet und für diesen den Betrag $\|\underline{v}\|$ gemäß (2.4.1)(4) berechnet, siehe hierzu Bild 2.4.2 mit Anwendung des Satzes des Pythagoras.

Weiter mit Abschnitt 2.8!

In den folgenden Abschnitten werden wir Spiegelungen und Drehungen in der Ebene behandeln.

2.5 Trigonometrische Funktionen sin, cos, tan

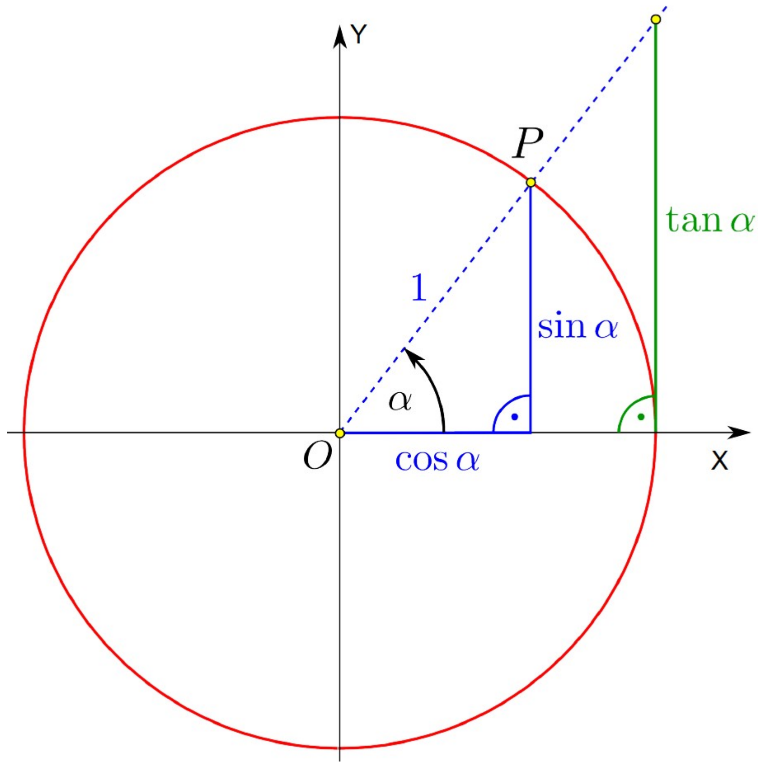


Bild 2.5.1 Definition der Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens

Bild(2.5.1) zeigt die Definition der Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens am Einheitskreis für beliebige Winkel. Der Koordinatenursprung ist mit O bezeichnet, der Einheitskreis ist rot dargestellt. P ist ein Punkt auf dem Einheitskreis im ersten Quadranten. Wir erinnern: Ein Winkel ist durch zwei, von einem gemeinsamen Punkt ausgehenden Halbgeraden definiert, hier die x – Achse ab dem Punkt O und die Halbgerade von O durch P. Wir bezeichnen den Winkel mit α, zunächst nur als Name, später wird auch ein Wert zugewiesen. Der Kreis mit dem Radius 1 schneidet die eine Halbgerade im Punkt P. Außerdem legen wir noch eine Richtung fest (im Bild durch einen Pfeil angedeutet), indem wir **die Reihenfolge der Halbgeraden** berücksichtigen, durch einen Pfeil gekennzeichnet, hier zuerst die Halbgerade auf der x – Achse, die hier fest vorgegeben ist. Dann sind in dieser Konfiguration alle Winkel durch Angabe der Koordinaten des Punkte P eindeutig angegeben und diese Koordinaten werden mit cos(α) und sin(α) bezeichnet:

- $P_x = \cos(\alpha)$ und $P_y = \sin(\alpha)$

Mit dem Satz des Pythagoras und dem Strahlensatz erhält man sofort die Gleichungen:

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ und
- $\tan(\alpha) = \sin(\alpha) / \cos(\alpha)$

Wir lassen hier also den Punkt P auf dem Einheitskreis wandern und die natürliche Frage ist, den wievielten Teil auf dem Kreis er für ein sin – cos – Wertepaar zurückgelegt hat. Bevor wir uns damit beschäftigen, wollen wir untersuchen, was passiert, wenn man einen

Winkel – festgelegt durch einen Punkt P1, um einen Winkel weiter dreht, siehe Bild (2.5.2). Wir haben also:

- Winkel 1: x – Achse ab O ; Halbgerade ab O durch P1 mit s_1 = sin1, c_1 = cos1
- Winkel 2: Halbgerade ab O durch P1 und Halbgerade ab O durch P2 mit s_2 = sin2, c_2 = cos2
- Zu ermitteln sind der sin – Wert s und der cos – Wert c zum Winkel : x – Achse ab O ; Halbgerade ab O durch P2

Man erhält: $c_1 / 1 = c / y$ und, da die Dreiecke mit den Seiten c, x, y und s_2, $c_2 - y$, $s - x$ zueinander ähnlich sind, $s_1 / c_1 = (c_2 - y) / s_2$. Damit folgt: $c = c_1 \cdot c_2 - s_1 \cdot s_2$. Weiter gilt: $x / c = s_1 / c_1$ und $(s - x) / s2 = 1 / c_1$; damit ergibt sich: $s = s_1 \cdot c_2 + s_2 \cdot c_1$, also:

Satz (2.5.1) Additionstheorem zweier Winkel

- $c = c_1 \cdot c_2 - s_1 \cdot s_2$ und
- $s = s_1 \cdot c_2 + s_2 \cdot c_1$

In Matrixschreibweise (siehe 2.8.5) hat man die **Drehmatrizen**:

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{pmatrix}$$

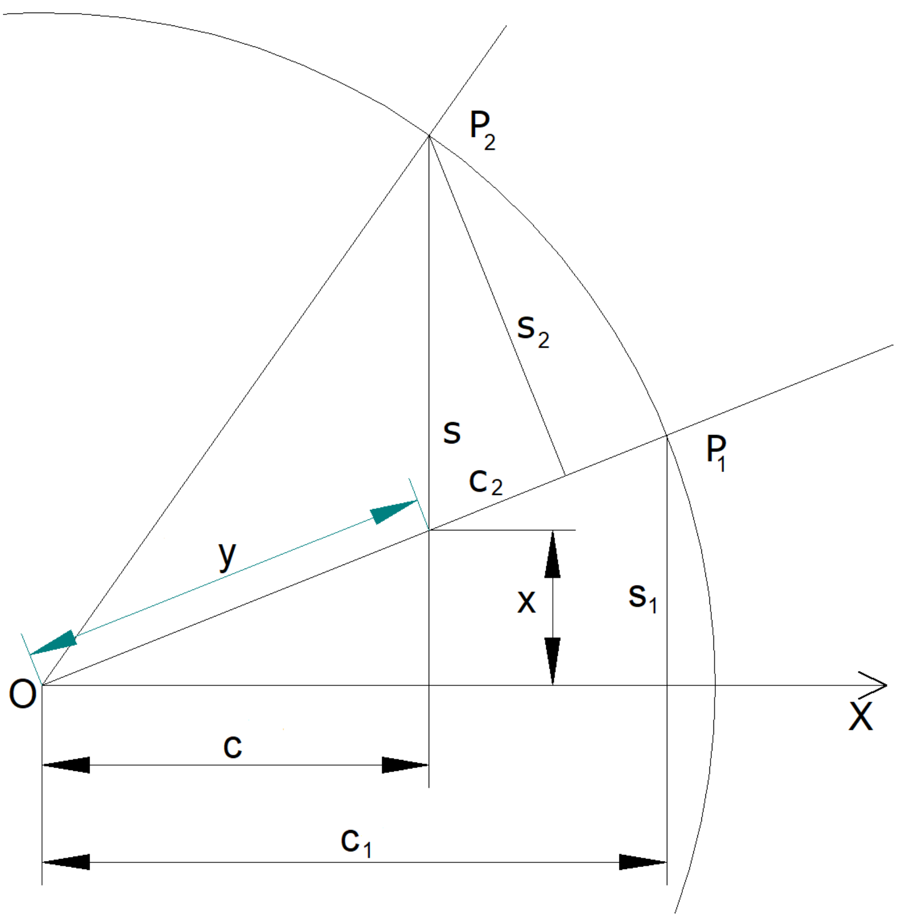


Bild 2.5.2 Drehung von P_1 nach P_2 im Kreis mit Radius r = 1

Mit (2.5.1) kann man auch leicht den Sinus und Cosinus für den „**halben Winkel“** berechnen. Seien c > 0 und s > 0 mit $s^2 + c^2 = 1$ gegeben und es sei definiert: $c^+ = c_1 = c_2$ und $s^+ = s_1 = s_2$. Zu bestimmen seien also c^+ und s^+ :

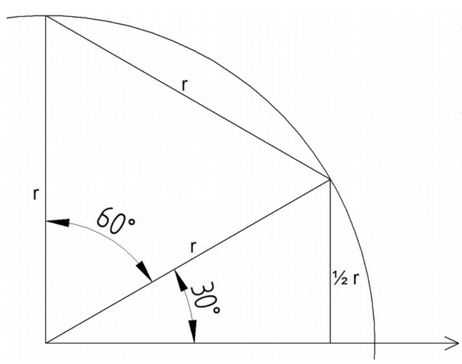
- $s = 2 \cdot s^+ \cdot c^+$ und $c = c^{+2} - s^{+2}$
- $s^+ = s / (2 \cdot c^+) \rightarrow c = c^{+2} - s^2 / (4 \cdot c^{+2}) \rightarrow c^{+4} - c \cdot c^{+2} - s^2 / 4 = 0 \rightarrow$
- $c^{+2} = (1 + c) / 2 = s^2 / (2 \cdot (1 - c))$, mit (1 – c) erweitert
- $s^2 = (2 \cdot s^+ \cdot c^+)^2 \rightarrow s^2 / (2 \cdot s^+)^2 = c^{+2} = c + s^{+2} \rightarrow s^{+4} + c \cdot s^{+2} - s^2 / 4 = 0 \rightarrow$
- $s^{+2} = (1 - c) / 2 = s^2 / (2 \cdot (1+c))$, mit (1 + c) erweitert **(2.5.2)**

Nun zur Frage, den wievielten Teil auf dem Kreis der Punkt P für ein sin – cos – Wertepaar zurückgelegt hat. Dazu wird der Kreis in 360 gleich große Teile zerlegt. Der sehr kleine Bogen zwischen zwei solchen Teilen wird als »1 Grad, kurz: 1°« bezeichnet, also der 360ste Teil eines Kreises.

Insgesamt hat der Kreis somit 360 Grad. Warum der Kreis ausgerechnet in so viele Teile zerlegt wird, hat historische Gründe: Vor 4000 Jahren entwickelte das Volk der Babylonier ein Zahlensystem, das von 60 ausgeht und für einen Kreis verwendeten sie 6·60 = 360 Teile.

Nun können wir die Position des Punktes P auf dem Einheitskreis also auf zweierlei Weise angeben:

- in Grad, also z.B. 45°, bezogen auf den Ursprung O und ausgehend von der x – Achse.
- oder als Koordinaten: $(1/\sqrt{(2)},\ 1/\sqrt{(2)})^t$ (bei 45°) im Koordinatensystem.



Zeichnerisch können wir problemlos 0°, 45°, 90° darstellen, aber auch, wie nebenstehende Zeichnung zeigt, 30° und 60°. Für 30° erhält man die Koordinaten:

- $(\cos(30°)=½ \cdot \sqrt{(3)},\ \sin(30°)= ½)^t$

Daraus erhält man mit (2.5.2) die Koordinaten für 15°:

- $(\cos(15°)=½ \cdot \sqrt{(2+\sqrt{(3)})},\ \sin(15°)= ½ \cdot \sqrt{(2+\sqrt{(3)})})^t$

Damit haben wir die Koordinaten bzw. die Sinus und Kosinus – Werte für die folgenden Winkel: 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°. Der Leser stelle eine Tabelle auf zusammen mit den Tangens – Werten und erweitere die Tabelle gemäß Bild 2.5.1 von 0° bis 360° in 15° – Schritten.

Nun noch einige Worte zum **Bogenmaß:**

Das Bogenmaß eines Winkels α (aufgefasst als Zentriwinkel eines Kreises) ist definiert als das Verhältnis der Länge des Kreisbogens b zum Radius r: $\alpha = b / r$

Ist der Kreis ein Einheitskreis (Radius $r = 1$), so ist das Bogenmaß gleich der Länge des Kreisbogens b.

Das Bogenmaß ist das natürliche Winkelmaß. Bei Verwendung des Bogenmaßes wird die Hilfsmaßeinheit Radiant mit dem Einheitenzeichen „rad“ nachgestellt, die allerdings oft weggelassen wird. Der Vollwinkel, also der Umfang des Einheitskreises, hat das Bogenmaß $2 \cdot \pi$ rad. Per Definition entspricht 1° dem Bogenmaß $2 \cdot \pi / 360$ rad und dadurch ist das Gradmaß definiert. Man hat also:

$1° = 2 \cdot \pi / 360$ rad

$90° = \pi / 2$ rad

$180° = \pi$ rad

$270° = 3 \cdot \pi / 2$ rad

$360° = 2 \cdot \pi$ rad

2.6 Wechselwinkel, Summe der Winkel im Dreieck ist 180° und Umkreis eines Dreiecks Teil 2

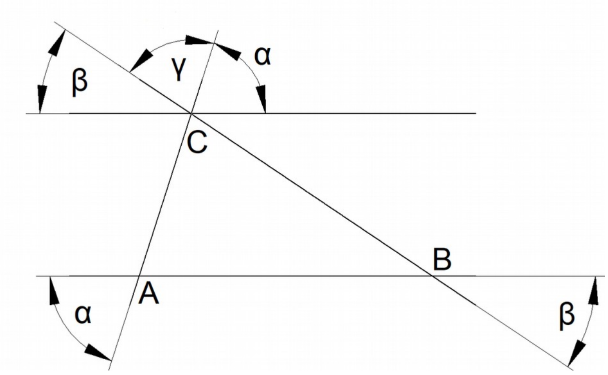


Bild 2.6.1 Wechselwinkel $\alpha \rightarrow \alpha$, $\beta \rightarrow \beta$ und Winkelsumme vom Dreieck ABC : $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Definition (2.6.1) Wechselwinkel

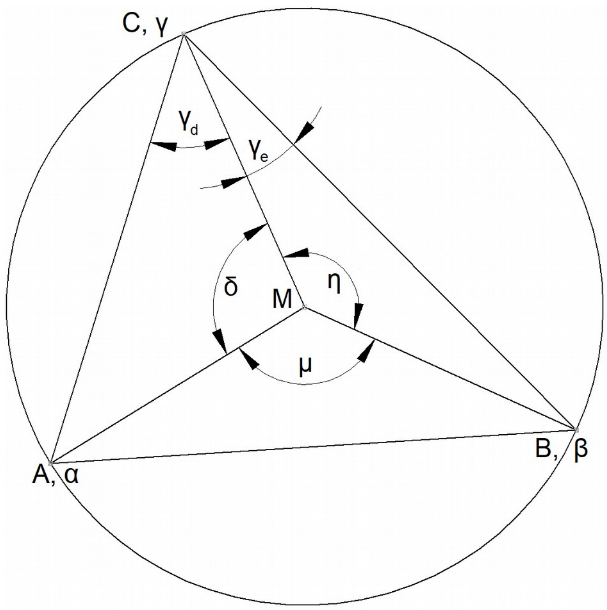


Bild 2.6.2 Kreis mit Mittelpunk M und Radius r und den Punkten A, B, C auf dem Kreis und dem Zentriwinkel $\mu = \sphericalangle AMB$ mit dem Umfangswinkel $\gamma = \sphericalangle ACB$ am Punkt C

Definition (2.6.2) Zentriwinkel, Peripheriewinkel

Ein Mittelpunktswinkel(Zentriwinkel) eines Kreises K(M, r) ist ein orientierter Winkel $\sphericalangle AMB$, wobei A und B Kreispunkte sind (siehe Bild 2.6.2).

Ein Winkel $\sphericalangle ACB$, der wie $\sphericalangle AMB$ orientiert ist und dessen Scheitel C auf dem Kreis liegt, heißt zugehöriger Umfangswinkel (Peripheriewinkel)(siehe Bild 2.6.2).

Gemäß Bild 2.6.2 erhalten wir:

- $\mu + \delta + \eta = 360°$
- $\gamma = \gamma_d + \gamma_e$
- $\delta + 2 \cdot \gamma_d = 180°$ (Winkelsumme im Dreieck A, M, C)
- $\eta + 2 \cdot \gamma_e = 180°$ (Winkelsumme im Dreieck B, C, M)
- $(\delta + \eta) + 2 \cdot (\gamma_e + \gamma_d) = 360° = 360° - \mu + 2 \cdot \gamma$; damit folgt:
- $\gamma = \mu / 2$ ebenso: $\beta = \delta / 2$ und $\alpha = \eta / 2$

Satz (2.6.3)

In der Konfiguration gemäß Bild 2.6.2 mit dem Kreis K(M,r) und den Punkten A, B, C auf dem Kreis gilt

(1) $\gamma = \mu / 2$ und $\beta = \delta / 2$ und $\alpha = \eta / 2$ und damit:

(2) $r = c / (2 \cdot \sin(\gamma)) = b / (2 \cdot \sin(\beta)) = a / (2 \cdot \sin(\alpha))$

2.7 Nochmals rechtwinkliges Dreieck

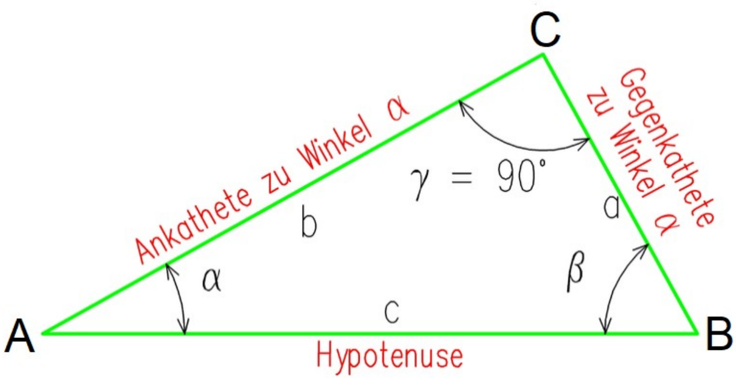


Bild 2.7.1 Mathematische Formeln zum rechtwinkligen Dreieck

Satz des Pythagoras:	$c^2 = a^2 + b^2$	(siehe Abschnitt 2, Satz (2.2.3))
Dreieck Flächeninhalt:	$A = (a \cdot b) / 2$	
Umfang:	$U = a + b + c$	
Höhe:	$h_c = (a \cdot b) / c$	(siehe Abschnitt 2, Satz (2.2.5))
Winkel:	$\alpha + \beta = \gamma = 90°$	

Das rechtwinklige Dreieck hängt eng zusammen mit den

Trigonometrische Funktionen cos, sin und tan :

sin(α) = Gegenkathete / Hypotenuse
cos(α) = Ankathete / Hypotenuse
tan(α) = Gegenkathete / Ankathete = sin(α) / cos(α)

2.8 *Punkte, Verschiebungen und Geraden „im“* $\mathbb{R}^2$

Wir erinnern uns an Abschnitt 2.4 und setzen jetzt – ganz abstrakt – den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ als bekannt voraus. Wir müssen uns im Klaren werden, was das mit der realen Anschauung in der Ebene zu tun hat und Wiederholen kurz: Wir ordnen die Elemente des $\mathbb{R}^2$ den möglichen **Verschiebungen (Translationen)** zu. Ein Punkt $\underline{P} \in \mathbb{R}^2$ kann dann als Verschiebung des Ursprungs interpretiert werden; in diesem Sinn bezeichnet man $\underline{P}$ auch als **Ortsvektor**. Ein Punkt $\underline{P}$ hat anschaulich gewissermaßen zwei Funktionen: Einerseits kann er eine Positionsangabe sein, die man nicht verschieben kann, andererseits als Punkt, der gerade die Position hat und den man verschieben kann. In diesem Sinn kann man einen Punkt $\underline{P}$ mit Hilfe einer Verschiebung (Translation) $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ auf einen anderen Punkt $\underline{Q} = \underline{P} + \underline{v}$ verschieben, natürlich $\underline{Q}, \underline{P}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$. Punkte bezeichnen wir mit großen Buchstaben und Verschiebungen bezeichnen wir mit kleinen Buchstaben, vorzugsweise $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ – der Unterstrich bedeutet immer, das zwei Koordinaten vorhanden sind. Natürlich können Punkte auch wie Verschiebungen interpretiert werden – die Unterscheidung ist rein anschaulich! Wir haben also:

Regeln und Definitionen (2.8.1)

(1) Verschiebungen $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ können addiert und skalar multipliziert werden; also für $a \in \mathbb{R}$ ist $a \cdot (\underline{u} + \underline{v})$ wieder eine Verschiebung

(2) Man kann einen Punkt $\underline{P}$ mit Hilfe einer Verschiebung $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ auf einen anderen Punkt $\underline{P}' = \underline{P} + \underline{v}$ verschieben und die Verschiebung, die notwendig ist, um P auf P‘ zu verschieben, erhält man wie folgt: $\underline{v} = \underline{P}' - \underline{P}$.

(3) Zwei Verschiebungen $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^2$ sind zueinander orthogonal genau dann, falls $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$ gilt.

(4) Zu einer Verschiebung $\underline{v} = (v_1, v_2)^t$ ist eine dazu senkrechte Verschiebung $\underline{v}^\perp$ gegeben durch $\underline{v}^\perp = (-v_2, v_1)^t$ und zwar per Definition so und nicht anders, damit gilt: $\underline{e_1}^\perp = \underline{e_2}$ bzw. $\underline{e_2}^\perp = -\underline{e_1}$ (positive Drehung um 90°)

(5) Zwei Verschiebungen $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^2$, $\underline{v}, \underline{w} \neq \underline{0}$, heißen parallel oder linear abhängig, falls ein $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $\underline{v} = a \cdot \underline{w}$

Definition (2.8.2)(a) Gerade g

Eine Gerade g ist eine Punktemenge, die durch einen Punkt $\underline{P} \in \mathbb{R}^2$ und eine Verschiebung $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ definiert wird:

(1) $G_{P,v} = \{ \underline{G} \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{G} = \underline{P} + a \cdot \underline{v} , \quad a \in \mathbb{R} \}$

(2) bzw. durch zwei Punkte $\underline{P}'$, $\underline{P}$: durch $\underline{P}$ und $\underline{v} = \underline{P}' - \underline{P}$ mit $\underline{v} \neq \underline{0}$ und dann wie unter (1)

Satz (2.8.3)(a) Abstand eines Punktes $\underline{Q}$ von g und dazu die Verschiebung

Gegeben sei eine Gerade g gemäß (2.8.2)(a) und ein Punkt $\underline{Q} \in \mathbb{R}^2$; gesucht ist eine Verschiebung $\underline{w} = b \cdot \underline{v}^\perp$ (s. (2.8.2)(4)) und ein Punkt $\underline{Q}' = \underline{P} + a \cdot \underline{v}$ mit $\underline{Q} = \underline{Q}' + b \cdot \underline{v}^\perp = \underline{P} + a \cdot \underline{v} + b \cdot \underline{v}^\perp$. Der Punkt $\underline{Q}$‘ liegt auf der Geraden, siehe Bild 2.9.2. Man erhält:

- $\underline{Q} - \underline{P} = a\cdot\underline{v} + b\cdot\underline{v}^{\perp}$ →
- $a = \underline{v}^t\cdot(\underline{Q} - \underline{P}) / (\underline{v}^t\cdot\underline{v})$
- $b = \underline{v}^{\perp t}\cdot(\underline{Q} - \underline{P}) / (\underline{v}^t\cdot\underline{v})$ Bemerkung: $\underline{v}^t\cdot\underline{v} = \underline{v}^{\perp t}\cdot\underline{v}^{\perp}$
- Mit $\underline{w} = b\cdot\underline{v}^{\perp}$ ist $\|\underline{w}\| = \sqrt{(\underline{w}\cdot\underline{w})}$ der **Abstand des Punktes $\underline{Q}$ von der Geraden g**

Definition (2.8.4) Normalenvektor als Einheitsvektor

Es ist immer praktisch, mit Einheitsvektoren zu arbeiten. Zu einer Verschiebung $\underline{v}$ können wir den Einheitsvektor $\underline{e}_v = (1/\|\underline{v}\|)\cdot\underline{v}$, also $\underline{v} = \|\underline{v}\|\cdot\underline{e}_v$ bilden. Man kann dann $\underline{e}_v = (c_v, s_v)^t$ mit $c_v^2 + s_v^2 = 1$ setzen und gemäß Abschnitt 2.5 einen Winkel zur x – Achse zuordnen. Zum Einheitsvektor $\underline{e}_v = (c_v, s_v)^t$ wird der Normalenvektor $\underline{n}_v = (-s_v, c_v)^t$ definiert, auch ein Einheitsvektor. Für den zugeordneten Winkel 0° hat man dann: $\underline{e}_v = \underline{e}_1 = (1, 0)^t$ und $\underline{n}_v = \underline{e}_2 = (0, 1)^t$. Es gilt natürlich: $\underline{e}_v\cdot\underline{n}_v = 0$

Mit diesem Wissen definieren wir eine Gerade neu:

Definition (2.8.2)(b) Gerade g

Eine Gerade g ist eine Punktemenge, die durch einen Punkt $\underline{P} \in \mathbb{R}^2$ und eine Verschiebung $\underline{e}_v \in \mathbb{R}^2$ mit $\underline{e}_v = (c_v, s_v)^t$ mit $c_v^2 + s_v^2 = 1$ definiert wird:

(3) $G_{P,ev} = \{ \underline{G} \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{G} = \underline{P} + a\cdot\underline{e}_v ,\ a \in \mathbb{R} \}$

(4) bzw. durch 2 Punkte $\underline{P}'$, $\underline{P}$: durch $\underline{P}$ und $\underline{v} = \underline{P}' - \underline{P}$ mit $\underline{v} \neq \underline{0}$ und $\underline{e}_v = (1/\|\underline{v}\|)\cdot\underline{v}$

(5) dazu wird der Normalenvektor $\underline{n}_v = (-s_v, c_v)^t$ gebildet und man erhält:

(6) $G_{P,ev} = G_{d,nv} = \{ \underline{G} \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{G}\cdot\underline{n}_v = \underline{P}\cdot\underline{n}_v = d \in \mathbb{R} \}$

Damit ergibt sich elegant:

Satz (2.8.3)(b) Abstand eines Punktes $\underline{Q}$ von g und dazu die Verschiebung

Gegeben sei eine Gerade $G_{P,ev}$ gemäß (2.8.2)(b)(3) und ein Punkt $\underline{Q} \in \mathbb{R}^2$; gesucht ist eine Verschiebung $\underline{w} = b\cdot\underline{n}_v$ und ein Punkt $\underline{Q}'$ auf der Geraden mit $\underline{Q}' = \underline{P} + a\cdot\underline{e}_v$ mit $\underline{Q} = \underline{Q}' + b\cdot\underline{n}_v = \underline{P} + a\cdot\underline{e}_v + b\cdot\underline{n}_v$. Die Gerade durch $\underline{Q}$ und $\underline{Q}'$ ist senkrecht zur Geraden g. Der Punkt $\underline{Q}'$ liegt auf der Geraden, siehe Bild 2.9.2. Man erhält:

- $\underline{Q} - \underline{P} = a\cdot\underline{e}_v + b\cdot\underline{n}_v$ →
- $a = (\underline{Q} - \underline{P})\cdot\underline{e}_v$ und $b = (\underline{Q} - \underline{P})\cdot\underline{n}_v$
- Mit $\underline{w} = b\cdot\underline{n}_v = (\underline{n}_v\cdot\underline{n}_v^t)\cdot(\underline{Q} - \underline{P})$ ist $\|\underline{w}\| = \sqrt{(\underline{w}\cdot\underline{w})}$ der **Abstand des Punktes $\underline{Q}$ von der Geraden g**

Satz (2.8.4) Schnittpunkt $\underline{S}$ zweier Geraden g und h

Gegeben seien die Geraden g und h durch:

- $\underline{P} \in \mathbb{R}^2$, $\underline{e}_v \in \mathbb{R}^2$ mit $\underline{e}_v = (c_v, s_v)^t$ mit $c_v^2+s_v^2=1$, $g = \{ \underline{G} \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{G} = \underline{P} + a\cdot\underline{e}_v ,\ a \in \mathbb{R} \}$
- $\underline{Q} \in \mathbb{R}^2$, $\underline{e}_u \in \mathbb{R}^2$ mit $\underline{e}_u = (c_u, s_u)^t$ mit $c_u^2+s_u^2=1$, $h = \{ \underline{H} \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{H} = \underline{Q} + b\cdot\underline{e}_u ,\ b \in \mathbb{R} \}$

Gesucht ist der Schnittpunkt $\underline{S}$ und damit die passenden Werte für a und b:

- $\underline{S} := \underline{P} + a\cdot\underline{e}_v = \underline{Q} + b\cdot\underline{e}_u$

Es gelte: $\underline{e}_v$, $\underline{e}_u$ sind linear unabhängig (nicht parallel), also:

- $\underline{e}_v\cdot\underline{n}_u = -c_v\cdot s_u + c_u\cdot s_v = -\underline{e}_u\cdot\underline{n}_v \neq 0$

Dann ergeben sich a und b aus:

- $\underline{P}\cdot\underline{n}_u + a\cdot(\underline{e}_v\cdot\underline{n}_u) = \underline{Q}\cdot\underline{n}_u$ und $\underline{P}\cdot\underline{n}_v = \underline{Q}\cdot\underline{n}_v + b\cdot(\underline{e}_u\cdot\underline{n}_v)$

Definition (2.8.5) Matrizen

Wir schreiben für $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ kurz: $\underline{\underline{A}} = (A_{ij})$; i: Zeilenindex, j:Spaltenindex; damit definieren wir:

(1) **Mat(2, $\mathbb{R}$)** = { $\underline{\underline{A}} = (A_{ij}) \mid A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} \in \mathbb{R}$ }

(2) Für $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \in$ Mat(2, $\mathbb{R}$) und $a \in \mathbb{R}$ wird **Addition** $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ und **skalar Multiplikation** $a\cdot\underline{\underline{A}}$ komponentenweise definiert.

(3) Für $\underline{\underline{A}} \in$ Mat(2, $\mathbb{R}$) und $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ ergibt sich: $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = (A_{11}\cdot v_1 + A_{12}\cdot v_2, A_{21}\cdot v_1 + A_{22}\cdot v_2)^t \in \mathbb{R}^2$

(4) Für $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \in$ Mat(2, $\mathbb{R}$) wird die **Matrix – Multiplikation** definiert: $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}} = (AB_{ij})$ mit $AB_{ij} = A_{i1}\cdot B_{1j} + A_{i2}\cdot B_{2j}$

(5) Für $\underline{\underline{A}} \in$ Mat(2, $\mathbb{R}$) wird die Determinante $\det(\underline{\underline{A}}) = A_{11}\cdot A_{22} - A_{21}\cdot A_{12}$ definiert.

(6) Für $\underline{\underline{A}} \in$ Mat(2, $\mathbb{R}$) wird die Spur($\underline{\underline{A}}$) = $A_{11} + A_{22}$ definiert.

(7) Für $\underline{\underline{A}} \in$ Mat(2, $\mathbb{R}$) mit $\underline{\underline{A}} = (A_{ij})$ wird die **transponierte Matrix** $\underline{\underline{A}}^t = (A_{ji})$ definiert

(8) $\underline{\underline{E}} \in$ Mat(2, $\mathbb{R}$) mit $E_{11} = E_{22} = 1$ und $E_{12} = E_{21} = 0$ ist die **Einheitsmatrix**.

2.9 Spiegelung an einer Geraden

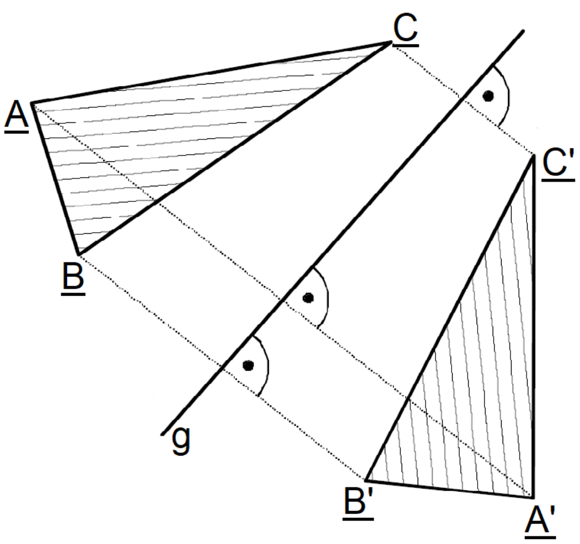


Bild 2.9.1: Wird einer Urfigur (ΔABC) durch Spiegelung an einer Geraden g umkehrbar eindeutig genau eine Bildfigur (ΔA'B'C') zugeordnet, so handelt es sich bei der Abbildung um eine (Achsen –) Spiegelung. Die Gerade g heißt Spiegelachse. Kurzschreibweise:

$\Delta ABC \;{}_g\!\!\rightarrow\; \Delta A'B'C'$

Man sagt: Urfigur und Bildfigur liegen symmetrisch zur Spiegelachse g.

Konstruktionsvorschrift mit Zirkel und Lineal (2.9.1)

(1) Die Gerade g zeichnen, an der gespiegelt werden soll

(2) Einen Urpunkt $\underline{P}$ zeichnen

(3) Durch $\underline{P}$ die Senkrechte (Lot) zur Geraden g zeichnen

(4) Kreis um den Schnittpunk durch $\underline{P}$ zeichnen

(5) Der weitere Schnittpunkt des Kreises mit der Senkrechten ist der Bildpunkt $\underline{P}$‘ von $\underline{P}$

Satz (2.9.1) Es gilt für Achsenspiegelungen gemäß P $_g\!\rightarrow$ P' :

(1) Bei allen Achsenspiegelungen schneidet die Verbindungsstrecke von Urpunkt P und Bildpunkt P’ die Spiegelachse unter einem rechten Winkel und sie wird von ihr halbiert.

(2) Bei allen Achsenspiegelungen ist nur die Spiegelachse Fixpunktgerade.

(3) Alle Senkrechten zur Spiegelachse und die Spiegelachse selbst sind Fixgeraden.

(4) Alle Achsenspiegelungen sind längen – und winkeltreu („Kongruenzabbildung“).

(5) Alle Achsenspiegelungen sind geraden – und kreistreu.

(6) Trotzdem unterscheidet sich das Spiegelbild deutlich vom Urbild: Man kann nämlich das Spiegelbild im Allgemeinen **nicht** durch eine sogenannte eigentliche Bewegung, also durch Drehen und Verschieben, zur Deckung bringen, siehe Bild 2.9.1.

Satz (2.9.2) Achsenspiegelung an einer Geraden g

Gegeben sei eine Gerade $g = \{ \underline{G} \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{G} = \underline{P} + a\cdot\underline{e}_v ,\ a \in \mathbb{R} \}$ mit $\underline{P} \in \mathbb{R}^2$ und $\underline{e}_v \in \mathbb{R}^2$ mit $\underline{e}_v = (c_v, s_v)^t$ mit $c_v^2 + s_v^2 = 1$ und $\underline{n}_v = (-s_v, c_v)^t$. Ferner sei ein Punkt $\underline{Q} \in \mathbb{R}^2$ gegeben.

Wir wenden Satz (2.8.3)(b) an. $\underline{Q}$ sei der Urpunkt, $\underline{Q}' = \underline{P} + a\cdot\underline{e}_v$ sei auf der Geraden g und $\underline{Q} = \underline{Q}' + b\cdot\underline{n}_v = \underline{P} + a\cdot\underline{e}_v + b\cdot\underline{n}_v$ und der Bildpunkt $\underline{Q}'' = \underline{Q} - 2\cdot b\cdot\underline{n}_v$. Man erhält:

- $\underline{Q} - \underline{P} = a\cdot\underline{e}_v + b\cdot\underline{n}_v$ $\rightarrow$
- $a = (\underline{Q} - \underline{P})\cdot\underline{e}_v$ und $b = (\underline{Q} - \underline{P})\cdot\underline{n}_v$ $\rightarrow$
- $\underline{Q}'' = \underline{Q} - 2\cdot b\cdot\underline{n}_v = \underline{Q} - 2\cdot((\underline{Q} - \underline{P})\cdot\underline{n}_v)\cdot\underline{n}_v = \underline{Q} - 2\cdot(\underline{Q}\cdot\underline{n}_v)\cdot\underline{n}_v + 2\cdot(\underline{P}\cdot\underline{n}_v)\cdot\underline{n}_v$

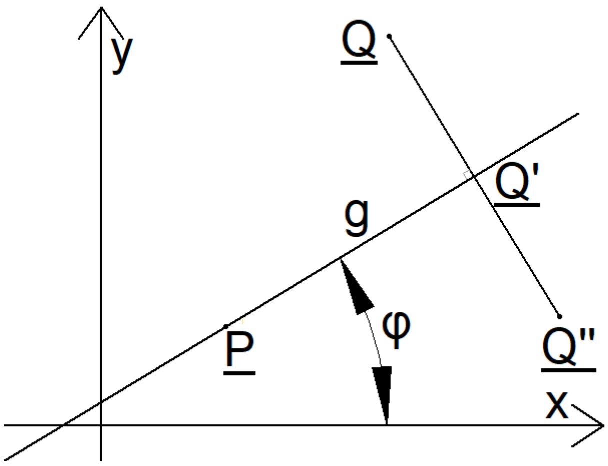


Bild 2.9.2 Ur – Punkt $\underline{Q}$ wird an der Geraden g gespiegelt. Bildpunkt: $\underline{Q}$“

Man erhält: $\underline{Q''} = (E - 2\cdot(\underline{n_v}\cdot\underline{n_v}^t))\cdot\underline{Q} = \begin{pmatrix} c^2-s^2 & 2cs \\ 2cs & s^2-c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} + 2\cdot(\underline{P}\cdot\underline{n_v})\cdot\underline{n_v}$. Zu einem gegebenen Winkel φ (siehe Bild (2.9.2)) wird man c = cos(φ) und s = sin(φ) wählen. Wir erkennen dann mit dem Additionstheorem (2.5.1), dass $c^2 - s^2 = \cos(2\varphi) = c_2$ und $2cs = \sin(2\varphi) = s_2$ gilt. Damit wird definiert:

Definition (2.9.3) Matrix für Spiegelung

Eine Matrix der Form $S = \begin{pmatrix} c^2-s^2 & 2cs \\ 2cs & s^2-c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & s_2 \\ s_2 & -c_2 \end{pmatrix}$ heißt Matrix zur Spiegelung, wobei c = cos(φ), s = sin(φ), $c^2 - s^2 = \cos(2\varphi) = c_2$ und $2cs = \sin(2\varphi) = s_2$ gelte und damit:

- $\underline{\underline{S}}^t\cdot\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{E}}$ mit $\underline{\underline{S}} = E - 2(\underline{n_v}\cdot\underline{n_v}^t)$ und $\underline{\underline{S}}^t = \underline{\underline{S}}$ und $\underline{n_v} = (-s_v, c_v)^t$

2.10 Drehungen, Spiegelungen und Gruppe O(2) der orthogonalen Matrizen

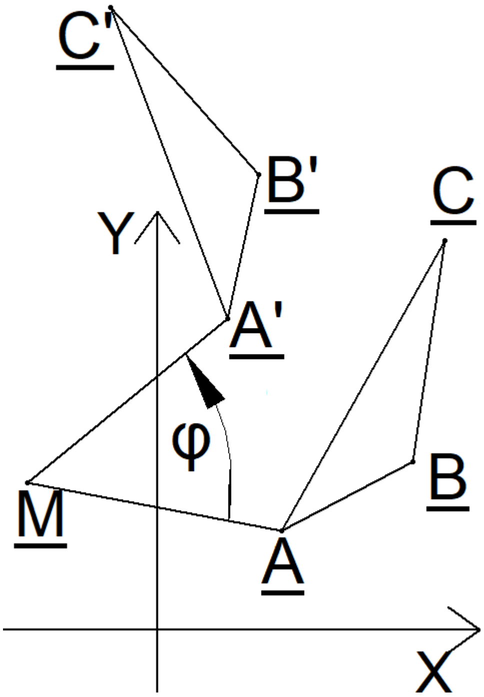


Bild 2.10.1 Der Punkt A wird um den Winkel φ, hier positiv (rechte Hand – Regel), um den Mittelpunkt M gedreht. Ebenso die Punkte B und C.

Definition (2.10.1) Drehung um den Winkel φ bezogen auf den Mittelpunk (Scheitelpunkt) M

Gegeben seien die Punkt A, M und das Winkelmaß φ. Wir setzen c = cos(φ), s = sin(φ) und $\underline{M}+\underline{v} = \underline{A}$, also $\underline{v} = \underline{A} - \underline{M} = (v_1, v_2)^t$ und $\underline{v}^\perp = (-v_2, v_1)^t$, der zu $\underline{v}$ senkrechte Vektor gemäß (2.8.1)(4). Dann wird die Drehung des Punktes A um den Winkel φ bezogen auf den Mittelpunk (Scheitelpunkt) M zum Bildpunkt A' definiert durch:

- $\underline{A}' = \underline{M} + c\cdot\underline{v} + s\cdot\underline{v}^{\perp} = \underline{M} + \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{D}})\cdot\underline{M} + \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$
- Eine Matrix der Form $\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ mit $c^2 + s^2$ heißt Drehmatrix. Für eine solche Matrix gilt allgemein:
- $\underline{\underline{D}}^t\cdot\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{E}}$

Mit $\underline{\underline{D}}^t$ wird offenbar die Drehung zurück bewerkstelligt. Der Leser mache sich dies klar, wobei zu beachten ist, dass nach der rechten Hand Regel nun – φ zu verwenden ist.

In (2.9.3) haben wir die Matrix S zur Spiegelung mit $\underline{\underline{S}}^t\cdot\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{E}}$ und in (2.10.1) die Drehmatrix D mit $\underline{\underline{D}}^t\cdot\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{E}}$. Das motiviert uns, die Gruppe O(2) der orthogonalen Matrizen näher zu untersuchen. Diese ist wie folgt definiert:

Definition (2.10.2) Gruppe O(2) der orthogonalen Matrizen

$O(2) = \{ \underline{\underline{T}} \in Mat(2, \mathbb{R}) \mid \underline{\underline{T}}^t\cdot\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{E}} \}$

Es gilt der wichtige Satz:

Satz (2.10.3)

$\underline{\underline{T}} \in O(2)$ genau dann, wenn $(\underline{\underline{T}}\,\underline{v}) \cdot (\underline{\underline{T}}\,\underline{u}) = \underline{v} \cdot \underline{u}$ für alle $\underline{v}, \underline{u} \in \mathbb{R}^2$

Beweis: man setze für $\underline{v}$, $\underline{u}$ die kanonischen Basisvektoren ein.

Wir bemerken, dass für jeden Vektor $\underline{e} = (c, s)^t$ der Länge 1, also $c^2 + s^2 = 1$, ein Winkelmaß φ zugeordnet werden kann, so dass c = cos(φ), s = sin(φ) gilt. Damit beweist man den folgenden Satz:

Satz (2.10.4)

$\underline{\underline{T}} \in O(2)$ genau dann, wenn c, s mit $c^2+s^2 = 1$ existiert, so dass mit c = cos(φ), s = sin(φ) gilt:

(1) $\underline{\underline{T}}(\varphi) = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}}(\varphi)$ ist eine Drehmatrix **oder**

(2) $\underline{\underline{T}}(\varphi) = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}}(\varphi)$ ist eine Spiegelmatrix, siehe (2.9.3) !!!

Die Menge aller Drehmatrizen wird mit $O^+(2)$ bezeichnet und die Menge aller Spiegelmatrizen mit $O^-(2)$. Bezüglich der Matrixmultiplikation, d.h. hintereinander Ausführung, gilt:

Satz (2.10.5)

- O(2) ist eine Gruppe
- $O^+(2)$ ist eine kommutative Untergruppe

Wie man mit (2.5.1) leicht zeigen kann, gilt:

Satz (2.10.6)

(1) $\underline{\underline{D}}(\varphi)\underline{\underline{D}}(\psi) = \underline{\underline{D}}(\varphi+\psi)$

(2) $\underline{\underline{S}}(\varphi)\underline{\underline{S}}(\psi) = \underline{\underline{D}}(\varphi - \psi)$

(3) $\underline{\underline{D}}(\varphi)\underline{\underline{S}}(\psi) = \underline{\underline{S}}(\varphi+\psi)$

(4) $\underline{\underline{S}}(\varphi)\underline{\underline{D}}(\psi) = \underline{\underline{S}}(\varphi - \psi)$

(5) $\det(\underline{\underline{D}}(\varphi)) = 1$

(6) $\det(\underline{\underline{S}}(\varphi)) = -1$

2.11 Bewegung

Definition (2.11.1) Bewegung, eigentliche (orientierungstreue) Bewegung

(1) Jede Abbildung f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\underline{x} \to f(\underline{x}) = \underline{\underline{T}}\,\underline{x} + \underline{v}$, $\underline{\underline{T}} \in O(2)$ und $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ heißt Bewegung

(2) Jede Abbildung f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\underline{x} \to f(\underline{x}) = \underline{\underline{D}}\,\underline{x} + \underline{v}$, $\underline{\underline{D}} \in O^+(2)$ und $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ heißt eigentliche bzw. orientierungstreue Bewegung.

Das ist eine ziemlich abstrakte Definition. Offenbar ist die Drehung um den Winkel φ gemäß (2.10.1) eine Bewegung und diese ist speziell auch eine eigentliche Bewegung. Die Spiegelung an einer Geraden gemäß (2.9.2) ist auch eine Bewegung, aber keine eigentliche Bewegung. Zunächst gilt bezüglich der Verkettung $f \circ g$ zweier Bewegungen f und g (also zuerst g, dann f):

Satz (2.11.2) Verkettung

Gegeben seinen Abbildungen f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\underline{x} \to f(\underline{x}) = \underline{\underline{T}}^f\,\underline{x} + \underline{v}$ und g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\underline{x} \to g(\underline{x}) = \underline{\underline{T}}^g\,\underline{x} + \underline{u}$. Dann wir die Verkettung $f \circ g$ definiert durch:

- $f \circ g$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\underline{x} \to f(g(\underline{x})) = \underline{\underline{T}}^f(\underline{\underline{T}}^g\,\underline{x} + \underline{u}) + \underline{v} = \underline{\underline{T}}^f\,\underline{\underline{T}}^g\,\underline{x} + \underline{\underline{T}}^g\,\underline{u} + \underline{v}$

Da $\underline{\underline{T}}^f\,\underline{\underline{T}}^g \in O(2)$, handelt es sich wieder um eine Bewegung. Handelt es sich bei f und bei g um eigentliche Bewegungen, so ist offensichtlich **$f \circ g$ wieder eine eigentliche Bewegung**. Beachte hierzu Satz (2.10.6) und Abschnitt 2.9!

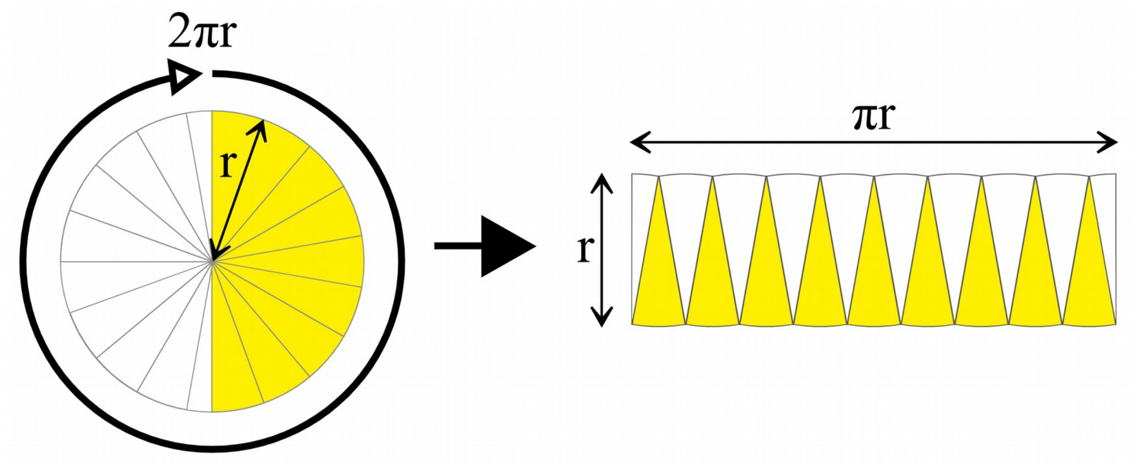
2.12 2 – D Figuren

Kreis:

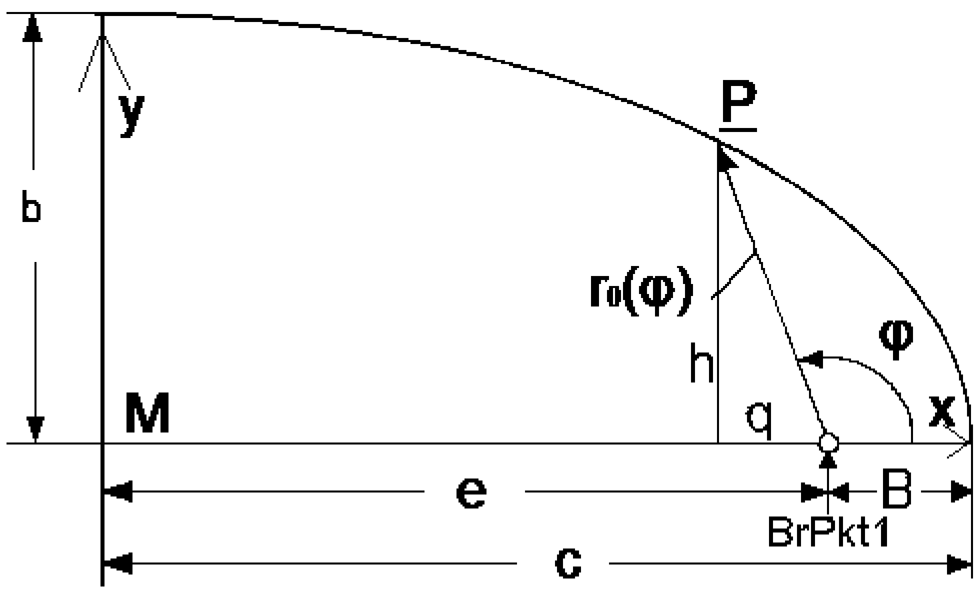
In einer Ebene E ist ein Kreis K mit Mittelpunkt $\underline{M} \in E$ und Radius $r > 0$ die Punktmenge:

$K = \{ \underline{x} \in E \mid \|\underline{x} - \underline{M}\| = r \} = K(M, r)$ **(2.12.1)**

Dabei ist der Radius r eine positive reelle Zahl, und der doppelte Radius heißt Durchmesser und wird oft mit d bezeichnet.



Ellipse:



Eine Ellipse ist ein symmetrisches geometrisches Gebilde, das im Abstand e vom Mittelpunkt M zwei sog. Brennpunkte BrPkt1 und BrPkt2 hat (siehe Bild). Der Abstand e heißt Exzentrizität der Ellipse. Ein Punkt P kann dann durch einen Winkel φ, dem Abstand r_0 vom Brennpunkt BrPkt1 zum Punkt P und dem Abstand r_1 vom anderen Brennpunkt BrPkt2 zum Punkt P beschrieben werden, wodurch ein Dreieck BrPkt1, P, BrPkt2 mit den Seitenlängen r_0, r_1, $2 \cdot e$ entsteht. Mit dem Halbmesser c ist nun die Ellipse durch die folgende Gleichung definiert:

- ➔ $r_0 + r_1 + 2 \cdot e = 2 \cdot (e + c)$
- ➔ $r_0 + r_1 = 2 \cdot c$
- ➔ $b^2 = c^2 - e^2$
- ➔ Exzentrizität $\varepsilon = e / c$ **(2.12.2)**

Wird ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung im Brennpunkt BrPkt1 verwendet, erhält man sofort die folgenden Zusammenhänge und Definitionen:

- $r_0(\varphi) = (c^2 - e^2) / (c + e \cdot \cos(\varphi))$
- $h(\varphi) = r_0(\varphi) \cdot \sin(\varphi) = P_y(\varphi)$
- $q(\varphi) = r_0(\varphi) \cdot \cos(\varphi) = P_x(\varphi)$
- **Kleiner Radius** der Ellipse: $B = c - e$
- **Großer Radius** der Ellipse: $A = c + e$
- $c = 0.5 \cdot (A + B)$
- $e = 0.5 \cdot (A - B)$ **(2.12.3)**